

Math. P.

294

20

Math. P. 4^o 294 x

Reiner

<36624679280015

<36624679280015

Bayer. Staatsbibliothek



C
DIE
GRUNDL EHREN
DER
ARITHMETIK
UND
DER ALGEBRA

AUS
DEN LEHRBÜCHERN, VORZÜGLICH DER
H. H. KAESTNER, UND LORENZ
AUSGEZOGEN,
UND ZUM GEBRAUCHE DER VORLESUNGEN
EINGERICHTET
VON

G. L. REINER
KANONIKUS UND PROFESSOR IN DEM
PRAEMONSTRATENSER COLLEGIATSTIFTE
STEINGADEN.

FÜSSEN
GEDRUCKT BEY BENEDIKT MAYR

1796.

B

Die *Mathematik*, welche von jeher die *erste* unter den Wissenschaften gewesen, und deren Werth zu allen Zeiten anerkannt worden ist, gewährt nicht nur Kenntnisse, die man nicht ohne Nutzen, und Vergnügen erlernt, und in denen Niemand, der auf Stand, und Erziehung Anspruch macht, ein völliger Fremdling seyn darf: sondern ist auch, wegen ihrer vorzüglichen Methode Jedem, dem es um Bildung des Verstandes zu thun ist, nicht genugsam zu empfehlen.



Lorenz.

GEDRUCKT BEY BENEDIKT MAYER
FÜRSTEN

1 5 0

GNÄDIGER HERR!
DEM
HOCHWÜRDIGEN HOCHWOHLGEBOHRNEN

H E R R N

A B B T E G I L B E R T ,

D E S

PRAEMONSTRATENSER COLLEGIATSTIFTES

S T E I N G A D E N

WÜRDIGSTEN PRAELATEN

MEINEM GNAEDIGEN

H E R R N .



GNABIGEL HERR
DEM
HOCHWÜRDIGEN HOCHWONNHABENDEN

HERRN
ABBTE GILBERT

Als Leberung
DES

PRÄMONSTRATENSER COLLEGIATSTUDES
STEINIGADEN

WÜRDIGSTEN PRÄLATEN

MEINEM GNAEDIGEN

HERRN.



GNAEDIGER HERR!

Aus Ueberzeugung, daß keine der Wissenschaften, eine gründlichere Religionskenntniß vorbereite, und mehr zur Bewunderung der Gröfse, Weisheit, und Güte Gottes führe, als das Studium der *Moral*, und der *Natur*, ließen **SIE** sichs von dem Antritte **IHRER** lobwürdigsten Regierung ganz besonders angelegen feyn, diese beyden Studien bey **IHREN** untergebenen Religiosen, einheimisch zu machen. *Mir* übertrugen **SIE** das *Lehramt der Naturlehre*, und ließen es an keiner Art Unterstützung gebrechen, wodurch die wissenschaftliche Kenntniß der Natur befördert werden kann. Die sprechenden Beweise davon sind: unser *Klosterbibliothek*, die nun jetzt mit einem Schatze von physikalischen Büchern pranget, den man in andern wohlhabendern Klöstern umsonst sucht;

GNÄDIGER HERR!

unser ganz neu angelegtes *Musäum*, das einen Apparat physischer, unter Direktion des H. Professors Späth in Altdorf neu verfertigter Werkzeuge aufweist, an welchen kein Kenner, Einfachheit, Genauigkeit, und Reinlichkeit vermisst; — und endlich das *neuerbaute chemische Laboratorium* das **SIE** mit allen, zur chemischen Untersuchung der Körper nöthigen Geräthschaften hinreichend versehen ließen. —

Ich müßte das *Pflichtmäßige*, das in dem, zu meinen, ob schon geringen, Kenntnissen gesetzte Vertrauen liegt, gänzlich misskennen, hätte ichs mir nicht zur unabänderlichen Maxime gemacht, **IHREN** wohlthätigen Absichten nach Möglichkeit entsprechen, und die mir anvertrauten Schüler in den heiligen Geheimnissen der

Na

Natur einweihen zu wollen. Aber überzeugt, daß nur derjenige feste und sichere Fortschritte in der *Naturkenntniß* machen kann, der mit den Grundlehren der *reinen Mathematik* vertraut ist; foderte ich allererst meine Kräfte auf, diese Lehren, nach ihrem ganzen Umfange, unter meinen Schülern zu verbreiten, und legte bey meinem Vortrage derselben, die besten allgemein anerkannten Lehrbücher, vorzüglich der H.H. *Kästner* und *Lorenz* zum Grunde.

Gegenwärtiger Auszug enthält die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Ich hatte dabey die Absicht, denselben nicht nur als Leitfaden bey den öffentlichen *Prüfungen* meiner Schüler — (wozu er allernächst bestimmt ist) — sondern auch als *Grundriß* zu den *Vorlesungen* über die benannten Zweige der reinen Mathematik

тік brauchbar zu machen. Und einer meiner vorzüglichen Wünsche wird erfüllt seyn, wenn **SIE**, mein gnädiger **HERR PRAE-
LAT!** diese meine Bemühung, die ich **IHNEN** zu überrei-
chen wage, als einen öffentlichen Beweis meiner unbegrenzten
Ehrfurcht und Dankbarkeit, anzunehmen geruhen.

Unterthänig gehorsamster

G. L. Reiner.



Die reine Mathematik

i m

Grundrifs.

Eingeführte Zeichen.

Das Zeichen der Gleichheit ist ($=$)

der Aehnlichkeit ($\sim$)

des Größern ($>$)

des Kleinern ($<$)

des Hinzuthuns ($+$)

des Hinwegnehmens ($-$)

des Vervielfältigens ($\cdot$) oder ($\times$)

des Theilens ($:$)

Allgemeine Grundsätze.

1.) Ist $A = B$; so ist auch $B = A$.

2.) Ist $A = A$; und $A = (a + b + c)$ so ist

3.) $A > a$; $A > b$; $A > c$; $A > a + b$; $A > a + c$; u. f. w.

4.) Ist $A = C$; und $B = C$; so ist $A = B$.

A 2

5.) Ist

- 5.) Ist $A = B$; und $C = D$; so ist $A + C = B + D$
 6.) Ist $A > B$; und $C = D$; so ist $A + C > B + D$
 7.) Ist $A = B$, $C = D$; so ist $A - C = B - D$
 8.) Ist $A > B$, und $C = D$; so ist $A - C > B - D$
 9.) Ist $A = B$; so ist $n \cdot A = n \cdot B$
 10.) Ist $A > B$; so ist $n \cdot A > n \cdot B$
 11.) Ist $A = B$; so ist $\frac{A}{n} = \frac{B}{n}$
 12.) Ist $A > B$; so ist $\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$

I.

Die Arithmetik

Der erste Abschnitt.

Von den gemeinen Rechnungsarten.

1.) Die Grundlehren von den Zahlen.

§. 1.

Erklärung. a.) Eine *Zahl* ist eine gewisse Menge von Dingen einerley Art, oder von Einheiten; *Dinge von einerley Art* heißen die, an denen man bloß ihr Uebereinstimmiges betrachtet; und das, worinn mehrere Dinge übereinstimmen, ist die *Einheit*.

b.) Eine

b.) Eine Zahl heißt benannt, wenn ihr Name

- N: 1. Zwei gleiche Größen lassen sich für einander
ersetzen. Eine Größe ist sich selbst, und allen seinen Theilen
N: 2. Zusammen genommen gleich.
N: 3. Jede Größe ist ^{größer} kleiner als ein, oder mehrere
ihrer Theile.
N: 4. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie
auch sich selbst gleich.
N: 5. Gleiches zu gleichem addirt giebt gleiches.
N: 6. Gleiches zu ungleichem addirt, giebt ungleiches.
N: 7. Gleiches von gleichem subtrahirt giebt wieder
gleiches.
N: 8. Gleiches von ungleichem subtrahirt giebt wieder
ungleiches.
N: 9. Gleiches mit gleichem multiplicirt, giebt gleiches.
N: 10. Gleiches mit ungleichem multipl: giebt ungleiches.
N: 11. Gleiches mit gleichem dividirt, giebt gleiches.
N: 12. Gleiches mit ungleichem dividirt, giebt wieder ungleiches.

Paragraphe I.

Eine Sache ist eine gewisse Menge von Dingen einerley
Art: Dinge von einerley Art aber sind Dinge, woran
sich selbst verschieden, aber sie müssen doch ein ^{gemeinsames}
Merkmal haben, das ausgehoben, und zusammen zur Einheit
gebracht wird von dem Begriff: Eineleyheit bilden.

5.) Ist $A = B$; und $C = D$; so ist $A + C = B + D$

Die Zahlen werden eingetheilt in benannte und unbenannte,
benannt heisst die, in wie fern die Art der Einheiten, aus
denen sie besteht zugleich angezeigt wird; unbenannt aber, so die-
ses nicht. So findet. So z. B. ist 5 an, und für sich
betrachtet eine unbenannte Zahl. Daß ich Verstehe wirklich
was diese Zahl Sagen, für ein Menschen Thiere, Gelder &c.
bezeichnen. Sage ich aber 5 Menschen, so ist sie benannt,
die ich gebe die Art der Einheiten, (so daß) sie bezieht in.

Eine Zahl bleibt diejenige, ^{reine} was die Menge ihrer Einheiten darzu-
tellt bleibt, seyn sie von welcher Art sie wollen; So z. B. ist 5 $\times$ 4
und 5 $\times$ 1 eine die nehmliche Zahl, denn 5 bleibt immer 5. Aber
die Grösse beruht auf der Zahl selbst, und auf der Grösse der
Einheiten, die es enthält. So ist also 5 $\times$ 4, und 5 $\times$ 1 ein grosser
Unterschied. Die Einheiten von 5 $\times$ 4 sind grösser als die 5 $\times$ 1.

$A + B + C = S$. Drey oder mehrere oder weniger
Zahlen zusammen ^{S.}geaddirt, machen eine gewisse Summe aus.
Die Summe finden, heisst mehrere Zahlen zusammen addiren.

Zusatz. $A + B = B + A$.

Es ist das nehmliche, ob ich die erste Zahl zur
zweiten, oder die zweite zur ersten addire.

b.) Eine Zahl heisst *benannt*, wenn ihr *Name*, d. i. die Art der Einheiten, aus denen sie besteht, zugleich angezeigt wird; *unbenannt* aber, wo dieses nicht geschieht.

Folgesätze. 1.) Nur *Dinge von einerley Art* lassen sich *zusammen zählen*, oder können eine Zahl ausmachen.

2.) Eine *Zahl* bleibt dieselbe, wenn die *Menge* ihrer Einheiten dieselbe bleibt, von welcher Art diese auch seyn mögen. Aber die *Grösse*, welche durch die Zahl ausgedruckt wird, beruhet auf der *Grösse der Zahl selbst*, und auf der *Grösse der Einheiten*, aus denen die Zahl bestehet.

3.) Eine Zahl wird *vermehrt*, oder *vermindert*, je nachdem solche Einheiten, aus denen sie bestehet, zu ihr gesetzt, oder von ihr weggenommen werden.

§. 2.

Erklärung. a.) Eine Zahl *S*, welche zweyen, oder mehrern Zahlen *A*, *B*, *C* &c. zusammen genommen, gleich ist, heisst deren *Summe*.

b.) Zwey, oder mehrere Zahlen *A*, *B*, *C*, *addiren*, oder *zueinander setzen*, heisst deren *Summe S* finden. $A \star B \star C = S$.

Zusatz. $A \star B = B \star A$.

A 3

c.) Eine

b.) Eine Grösse A heisst ein *aliquoter Theil* einer andern B; und die andre B ein *Vielfaches* der ersten A; wenn die erste A, etlichemal zu sich selbst gesetzt, der andern B gleich wird.

Zusatz. 1.) Jede Zahl ist ein Vielfaches der Einheit und die Einheit ein aliquoter Theil jeder Zahl.

2.) Von zweyen Zahlen ist jede entweder ein Vielfaches der andern, oder doch ein Vielfaches von irgend einem aliquoten Theil der andern.

§. 3.

Erklärung. a.) Wird von zweyen Zahlen, AB, BC — (den *Factoren*) — die eine AB — (der *Multiplicandus*) — so vielmal zu sich selbst addirt, als die andere BC der *Multiplicans*, Einheiten enthält: So heisst die gefundene Summe ABCD ihr *Produkt*, oder *Factum*.

b.) Zwey Zahlen, AB, BC mit einander *multipliciren*, oder *vervielfältigen*, heisst ihr Produkt ABCD finden.
 $AB \times BC = ABCD$.

Zusatz. 1.) In dem Produkte ABCD steckt der Multiplicandus AB so vielmal, als die Einheit im Multiplicans BC.

2.) In dem Produkte ABCD steckt der Multiplicans BC so vielmal, als die Einheit im Multiplicandus AB.

Ein aliquoter Theil einer ~~andern~~ Größe heißt jener, der
mehrmal zu sich selbst gesetzt, eine gewisse Größe
gleich ist. $A + A + A = B$. $4 + 4 + 4 = 12$.

Ein aliquoter Theil aber, gibt mir genau auch eine
Größe, die vermengt mit andern Zahlen. $A + B + C = D$. Addition.
 $3 + 4 + 5 = 12$.

Die Einheit ist ein aliquoter Theil von jeder Zahl.
Und jede Zahl ist ein Vielfaches / Multiplicum / der Einheit.
Von zweien Zahlen aber: z. B. 4 6. 4 hat
zum aliquoten Theil 2 und die Einheit. 6 hat
zum aliquoten Theil 3, 2, und die Einheit. 6 ist das
Multiplicum von 4, aber 4 ist kein aliquoter Theil
von 6.

§ 3.

Multiplicatio

In dieser ist Multiplication mit der Addition übereinstimmend
dass das Produkt eine Zahl ist, und das ^{die Zahl} Vermehrte.

Von zweien Zahlen ^{eine} B oft zu sich selbst hinzugesetzt, es
die andere Einheiten enthält, heißt ihr Produkt.
Das Produkt finden heißt mehrere Zahlen untereinander
multiplicieren.

Satz. i. In dem ganzen Produkte

A	x	x	x	x	B
	x	x	x	x	
D	x	x	x	x	C

 steht der
Multiplicandus sovielmahl, als
licandus BC Einheiten. ^{hat} BC hat 3 Einheiten, es steht
der Multiplicandus AB 3 mahl im ganzen Produkt.
Und so umgekehrt.

Zusatz: Der Multiplicandus ^{BC} steht in dem Produkte

A	x	x	x	x	B
	x	x	x	x	
D	x	x	x	x	C

sovielmahl, als die Einheit im Multiplican-
dus AB. Der Multiplicandus AB hat 4 Ein-
heiten, also muss auch der Multiplicandus BC 4 mahl
im ganzen Produkt stehen, wie man auch selbst sieht.

Ist immer gleich ob ich den ersten Factor mit den
 zweiten, oder den zweiten mit den ersten multipliziere

4 Zusatz. Teile den $\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{3}$.

5. Zusatz. Wenn der Multiplicandus in mehrere Theile getheilt ist,
 so muß man nicht einen, oder mehrere, sondern alle Theile des Multipli-
 candus mit dem andern Factor multipliciren. Z: B:

$$13 = 6 + 4 + 3 \times 5 \begin{array}{l} 3 \cdot 5 \\ \hline \end{array} = 15 + 4 \cdot 5 = 20 + 6 \cdot 5 = 30.$$

Ist das ganze Produkt, wenn das die alle Produkte zusammenaddiert
 werden, 65.

6 Zusatz. Wenn ein ganzes in Theile eingetheilt ist, und diese Theile alle
 einander gleich sind, also aliquote Theile sind, und wird
 nun ein aliquoter Theil mit dem Gemeintheilen Mul-
 tiplicator multiplicirt, so steht das Produkt so oft im
 ganzen als der aliquote Theil in seinem Ganzen. Z: B:

Multiplicandus. Theile.

$$16 = 4 + 4 + 4 + 4 \times \frac{1}{4} \text{ Multiplikator:}$$

$$4 \neq 4 = 4 = 4$$

So steht, wenn ich 4 mit 4 multipliciere, das Produkt
 16. Ich mit 4 im Produkt 16 $\times$ 4, so vielmahl, als 4
 4, in 16. Z: B: ist

$$\begin{array}{cccc} A & \times & G & + & F & + & K & + & B \\ & \times & \times & & \times & \times & \times & \times & \\ D & \times & \times & & \times & \times & \times & \times & C \end{array}$$

So steht das Produkt AG $\times$ mit BC so oft im Produkt
 AB, als $\times$ mit BC, sovielmahl als AG in AB.

7 Zusatz. Wenn gleiche Factoren ^{da sind}, giebt es Würden, Potenzen.
 $\S 4.$

Subtrahiren heißt: von einer größeren Zahl eine kleiner wegnehmen.
 was dar übrig bleibt, heißt Differenz, Ueberschuß des größeren
 über das kleinere. $6 - 4 = 2$. I Zusatz. Nimm ich die größere für
 kleinere Zahl, und die Differenz wieder zusammen, bekomme ich die ganze Summe.
 II Zusatz. Wenn zwei Zahlen einer dritten gleich sind, und ich nehme eine von beiden.
 so ist die Summe der zweyten gleich. $A + B = S$. $S - A = B$. $S - B = A$. Sage ich
 eine Zahl zur andern, und nehme sie wieder weg, so bleibt die rechte übrig.

$$3.) AB \times BC = BC \times AB.$$

4.) Das Produkt entsteht aus dem einen Factor so, wie der andere Factor aus der Einheit.

$$5.) \text{Ist } AB = AE \times FB; \text{ so ist } AB \cdot BC = AE \cdot BC \times FB \cdot BC, \text{ und } BC \cdot AB = BC \cdot AE \times BC \cdot FB.$$

6.) Das Produkt $AG \times BC$ steckt im Produkte $AB \times BC$ so vielmal, als AG in AB .

$$7.) AA = A^2; AAA = A^3; AAAA = A^4; \text{ u. s. w.}$$

§. 4.

Erklärung. a.) Wird von einer Zahl A eine kleinere B weggenommen; so heisst der Rest D , die *Differenz*, oder der *Unterschied* der beyden Zahlen, der *Ueberschuss* der grössern über die kleinere.

b.) Zwey Zahlen A, B , voneinander *subtrahiren*, oder *wegnehmen*, heisst ihre Differenz finden. $A - B = D$.

Zusatz. 1.) $B \times D = A$

2.) Wenn $A \times B = S$ so ist $S - A = B$, und $S - B = A$.

3.) $A \times B - B = A$.

§. 5.

Erklärung. a.) Wird von einer Zahl $ABCD$, dem *Dividendus* eine andere AB , der *Divisor*, wiederholentlich so oft weg-

*N.B. Ist $AB = AG + GF + FB$.
und $AG = GF = FB$.*

So steckt das Produkt $AG \times BC$ in Produkte $AB \times BC$ so vielmal, als AG in AB .

genommen, bis von jener nichts mehr vorhanden ist; so heisst die Zahl BC , welche anzeigt, wie oft solche Wegnahme geschehen, der *Quotient* solcher Zahlen.

b.) Zwey Zahlen $ABCD$, AB miteinander dividiren, oder durcheinander theilen, heisst ihren *Quotienten* CD finden.

$$ABCD : AB, \text{ oder } \frac{ABCD}{AB} = CD.$$

$$\text{Zusatz. 1.) } \frac{ABCD}{AB} = \frac{CD}{1}$$

$$2.) AB \cdot BC = ABCD.$$

$$3.) \frac{AB \cdot BC}{BC} = AB; \text{ und } \frac{AB \cdot BC}{AB} = BC.$$

$$4.) \text{ Ist } \frac{ABCD}{AB} = CD \text{ so ist } \frac{ABCD}{CD} = \frac{AB}{1}.$$

Anmerk. Alle Veränderungen der Zahlen geschehen auf eine der §. 2. 3. 4. 5. angezeigten vier Arten, der Addition, Multiplication, Subtraction, und Division; welche daher die *gemeinen Rechnungsarten*, oder *Species der Arithmetik* heissen.

2. Die Gesetze der Dezimalzahlen.

§. 6.

Wahlsatz. a.) Hat man die Einheiten, oder die *Einer* immer bis zehen gezählt: so mache man aus jeden zehn Einern ein

5.

Wird von einer Fall ABCD einem Dividens, eine andere Lauf BC de Divi-
sor, wiederholtlich so oft genommen, es 2 nur möglich ist, so heißt die Zahl
ab, welche anzeigt, wie oft der Divisor in Dividens anhalten liegt, der Quo-
tient solcher Zahlen.

freij fehlen miteinander dividieren, d: h: Inak einander theilen, heißt
bei Quotient finden. f: B:

Dividend $12 : \frac{\text{Divisor}}{3} \text{ oder } \frac{12}{3} = 4.$

Satz I. Der Divisor ist so oft in Dividendus enthalten, als der Quotient Einheiten hat. z. B. $\frac{abcD}{ab} = \frac{CD}{1}$ oder $\frac{12}{1} = \frac{3}{1} \cdot 4$ ist in 12 dreimal enthalten, wie eins in 3 mal.

Zusatz II. Die Multiplication und die Division gelten einander zu Prok,
oder dividire multipliciere ich den Divisor mit dem Quotient, so
gibts mir den Dividendus. z. B. $AB \times CD = ABCD$. oder
 $4 \times 3 = 12$.

4 x 3 = 12.

Satz III. Wenn ein Produkt, und nur ein Factor gegeben ist, so muß ich den Factor n : das Produkt dividieren, um den andern Factor zu bekommen, und dieser zweyte Factor ist dann der Quotient. Z: B. $12:6=2$. und habe ich den Factor 2 so kommt der Factor der Quotient. $12:2=6$.

Satz IV. Der Quotient ist so oft im Dividendum enthalten, als der Divisor Einheiten hat. z. B. $\frac{ABCD}{C} = \frac{AB}{1}$. Der wir nehmen das Produkt 24 an, und der Divisor 4 so wird der Quotient 6 seyn. Also dividire ist, das Produkt 24 mit 6 den Quotienten, und da werde ich den finden, dass der Quotient eben so oft in ganzem Produkt enthalten sey, als der Divisor Einheiten hat. z. B. $\frac{24}{6} = \frac{4}{1}$.

II Die Gesetze der Decimal = Zahlen.

§ 6.

§ 6.
Man nennt diese Zahlen deswegen Decimelfahlen, weil zehn Ein-
heiten, allzeit wieder fünf angenommen ~~geworden~~ⁱⁿ eine neue Einheit
aufgenommen werden, woraus das Fehlen von der 10 zu zwey 5
oder zwei Würde entstehen.

Die ersten neun Zahlen sind nur Simple Zahlen, und von keiner
Würde. so aber ist schon eine Zahl von der ersten Würde.
Nim ich da wieder zehn Zahlen, so bekomme ich die zweite Würde,
Nim ich zehn^{mal} zehn Zahlen, oder zehn Hunderts, so giebt es die
3^{te} Würde, und so fort, wider man diese Würde allezeit, um
zu einer höhern hinaufzusteigen, um zehn Zahlen von der Mehrheiten
vergrößert.

Erster Zusatz. Hierdurch erhält man nebst den Einern, noch zusammen
mengesetzte Einheiten, in Verschiedenen Ordnungen.
Z. B. 35 ist zusammen gesetzt aus 3 Einheiten der
ersten Ordnung, und 5 Simplen Einheiten. So ist 109
zusammen gesetzt aus 1 Einheit der zweiten Ordnung
aus keiner Einheit der Dritten, und aus neun der Sim-
plen Zahlen Einheiten.

Zusatz II. Dafs eine Zahl immer die nämliche bleibe, wenn man
auf ihren Werth, ~~keine~~ und Größe keine Rücksicht nimmt,
haben wir schon gesagt. So bleibt z. B. 5 jederzeit
5, wenn aber auf den Werth und die Größe Acht
so werden 5^{er} wohl größer seyn als 5^{ter}.

Zusatz III. Die Zahlen sind 1 2 3 4 5 6 7 8 9. 0 ist keine Zahl
aber sie vergrößert den Werth einer Zahl jederzeit um
zehn, nachdem sie D^z gesetzt wird. Jede größere Zahl
ist entweder eine Summe von kleineren, und der zehn z.
B. 13 ist zusammen gesetzt aus einer kleineren, 1, und aus
3 Einheiten zehn der ersten Würde. oder sie ist ein Vielfaches
des zehn. z. B. 50. oder die Summe eines Vielfachen und
einer kleineren. 56 ist die Summe von 5 Einheiten der
ersten Würde, und 6 Simplen Einheiten.

ein Zehend, oder einen Zehner. Mehrere solche Zehner zähle man wieder bis zehn, und mache aus jeden zehn Zehnern ein Zehend von Zehnern. Dieses wiederhole man, so oft es beliebt, nur dafs man kürzer sage: *Hundert* für zehn Zehner; *Tausend* für zehn Hunderte; *zehntausend* für zehnmal zehn Hunderte; *Hunderttausend* für zehn Zehntausende; *Million* für zehn Hunderttausende; *Billion* für Millionmal Million u. f. w.

- Zusatz.* 1.) Hierdurch erhält man auſſer den *Einern*, auch noch *zusammengesetzte Einheiten*, von verschiedenen *Ordnungen*.
2.) Eine *Zahl* bleibt zwar an ſich dieſelbe; kann aber einen *höhern*, oder *geringern Werth* haben, je nachdem die *Einheiten* die ſie zählt, von *höherm*, oder *geringerm Werthe* ſind.
3.) Die *Namen* für die *erſten zehn Zahlen* ſind aus dem gemeinen Sprachgebrauche bekannt; ſo wie auch die *Namen* für jede *größere Zahl*, die entweder die *Summe* einer *kleinern*, und der *zehn*, oder ein *Vielfaches der zehn*, oder die *Summe eines Vielfachen*, und einer *kleinern* iſt.

§. 7.

Wahlsatz. b) Zu Zeichen der Zahlen bediene man sich der bekannten arabischen Ziffern, so, daß jede derselben eine gewisse Menge von Einheiten bedeute, und der Werth solcher Einheiten durch die Stelle angezeigt werde, den die Ziffer von der rechten Hand gegen die linke nach den verschiedenen Ordnungen der Einheiten einnimmt.

Zusatz. 1.) Hiedurch erhalten die Millionen die *sechste* Stelle nach den Einern; die Billionen die *zwölfte*; die Trillionen die *achtzehende* u. f. w.

2.) $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; u. f. w.

3.) $7483 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3$.

§. 8.

Aufgabe. 1.) Zwey Zahlen, wenn in einer derselben, oder auch in beyden, den Ziffern Nullen beygefügt sind, miteinander zu multipliciren

Aufl. a.) A. 3000 $\times$ B. 2 so ist $AB = 2 \times 3000$

b.) A. 3000 $\times$ B 200; so ist $AB = 2 \times 300000$

2.) Jede Zahl, die mit Ziffern geschrieben ist, mit Worten auszusprechen; d. i. zu numeriren.

Aufl. a.) 384.257

b.)

§ 7.

Wahrg. b.) Da Weth jeder Zahl wird genau bestimmt, durch die Stelle, welche er unter mehreren Zahlen einnimmt. Man zählt von der rechten Hand gegen die linke eben deswegen, weil die Arabischen Ziffern, die wir uns bedienen, bey den Arabern ⁱⁿ sich aufeinander worden, so man auch von der rechten zu linken las.

Zusatz: I. Die Millionen erhalten die 6te Stelle nach der Einsen der glattweg die 7te. Die Billionen die 12te u. f. x.

Zusatz: II. Man kann eine gewisse Zahl verschieden ausdrücken z. B. ich kann schreiben 100 glattweg, oder 10^2 d. h. Einheit von der zweyten Würde. So kann ich 1000 ausdrücken durch 1. oder 1000.

Zusatz III. So kann ich auch große Zahlen von verschiedenen Weisen verschiedenlich aufschreiben. z. B. 68945 kann ich schreiben 6. 10^4 + 8. 10^3 + 9. 10^2 + 4. 10^1 + 5.

§ 8.

Aufgabe. 1.) Wie kann man 2 Zahlen, von die eine derselben oder auch die beyden nullen sind, miteinander multiplicieren?

Off. a.) Man multipliciert nur die Zahlen, aber nicht die Nullen, welche, wie wir schon oben § 6 Zusatz III sagten, keine Zahlen sind; und dann setzt man die Nullen, so viel sie auch immer seyn mögen. z. B. $600 \times 2 = 1200$.

2.) habe beyde Zahlen Nullen, so werden auch nur die Zahlen multipliciert aber die Nullen von beyden Factoren werden zusammengezählt. z. B. $300 \times 200 = 60000$

Aufgabe. 2.) Eine Zahl mit Worten ausdrücken heißt numerieren.

Aufl. a.) 543465. heißt ~~fünf~~ fünfzigtausend vierhundert

b.) $78^{\text{'''}} 469.375^{\text{''}} 20.87913.472^{\text{'}} 983.765.$

Zusatz I. Jede Zahl, die mit bekannten Werten ausgedrückt wird, lässt sich leicht schreiben.

Zusatz II. So kann man eine Zahl verschiedentlich ausgedrückt werden, wie erhellen aus § 17, Zusatz II und III.

C. Rechnung mit Decimal Zahlen.

Aufgabe I.) Addieren heißt, mehrere Zahlen zu einander hinzusetzen, und daraus ihre Summe finden. Man muß aber wohl acht haben, daß man jede Zahl an ihr gehörigen Platz schreibt. So kann ich z. B. nicht schreiben

25789

3658

Den 2 von der ober Zahl ist eine Zahl Zahl von der 4^{ten} Würde da hinzugehen 3 in der unter nur von der 3^{ten} ist. Also muß man die Einheiten von jeder Würde untereinander setzen. z. B.:

Auflös.

258967

68329

5624

332920

zu bemerken

Aufgabe II.) Beim Subtrahieren ist ebenfalls, daß die Zahlen, von gleicher Würden unter einander gesetzt werden, z. B.:

890740032

784326714

106413318

890740032

Zusatz. Die Addition, und Subtraktion dienen einander zur Probe. Ist addirt nehm ich die kleinere Zahl, und die, um welche sie kleiner zusammen, und dies gibt wieder das ganze Ganze.

b.) $54^{\text{'''}} 687.063^{\text{''}} 269.375 683.725.$

Zusatz. 1.) Eine Zahl, die mit Worten in einer bekannten Sprache ausgedruckt ist, läßt sich leicht mit Ziffern schreiben.

2.) $5000 = 5. 10^3 = 50. 10^2 = 500. 10^1$; oder
 $432 = 4. 10^2 + 3. 10^1 + 2 = 43^1. 10^1 + 2 = 42. 10^1 + 12. \text{ u. f. w.}$

3. Die Rechnung mit Decimalzahlen.

§. 9.

Aufgabe. 1.) Zwey, oder mehrere Zahlen zu einander zu *addiren*.

Auflös. A. 7 8 4 6 2 .

B. 5 9 0 3 .

C. 8 6 1 .

S. = 8 5 2 2 6 .

2.) Zwey Zahlen von einander zu *subtrahiren*.

Auflösung. A, $\overset{8}{\underset{0}{\overset{0}{\underset{0}{\underset{7}{\underset{3}{\underset{8}{\underset{7}}}}}}}}$

B, $\overset{6}{\underset{4}{\underset{5}{\underset{9}{\underset{7}{\underset{8}{\underset{4}}}}}}}$

D = 1 5 4 7 6 0 3

Zusatz. Die *Addition* und *Subtraction* dienen einander zu Proben.

B 2

§. 10

§. 10.

Aufgabe. 3.) Die *Pythagorische Tafel* oder das *Einmaleins*, d. i. die Produkte aller einziffrigen Zahlen zu finden.

Aufl. Man schreibe in der *obersten* Reihe die 9. *Ziffern* neben einander; in der *zweyten* ihr *zweyfaches*, wenn man jede zu ihr selbst addirt, in der *dritten* ihr *dreyfaches*, wenn man das *Zweyfache* zum *Einfachen* addirt, in der *vierten* ihr *Vierfaches* wenn man das *Dreyfache* zu den *Einfachen* addirt; so ferner ihr *Fünffaches* bis *Neunfaches*.

Zusatz. 1.) Hieraus läßt sich leicht zu zwey gegebenen Faktoren das gehörige Produkt; und zu einem gegebenen Produkte, und dem einen Faktor, der andere Faktor finden.

2.) Desgleichen wenn den einfachen *Ziffern* noch Nullen beygefügt sind.

§. 11.

Aufgabe. 4.) Zwey Zahlen miteinander zu *multipliciren*.

Aufl. A. 3 4 2 5 7 6

B. 5 2 0 3

C. 1 0 2 7 7 2 8

D. 6 8 5 1 5 2

E. 1 7 1 2 8 8 0

P. 1 7 8 2 4 2 2 9 2 8.

Auf-

Die Pythagorische Tafel. Der Des Einmal Eins.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Zusatz I. Hieraus ist zu ersehen, dass ein Produkt und den Factor des andern Factor, und zu zweien Factoren des Produkts finden.

Aufgabe für eine Division.

Auflösung.

$$\begin{array}{r}
 6 \times 5442 \\
 2799784 \\
 1782422928 \quad | \quad 5203 \\
 342576666 \\
 34257777 \\
 34255 \\
 342
 \end{array}$$

Probe.

$$\begin{array}{r}
 \text{Divisor. } 342576 \quad \text{Quotient. } 5203 \\
 \hline
 31218 \\
 36421 \\
 26015 \\
 10406 \\
 20812 \\
 15609 \\
 \hline
 1782422928 \quad \text{Dividentum}
 \end{array}$$

Der Quotient wird nemlich multipliciert durch den Divisor, das ganze den Dividenten addiert, welches dann gleich sein muß dem Dividenten, wenn die Division richtig vor sich gegangen ist.

4 Die Abmessung der Zahlen.

§ 12.

Eine Zahl heisst ein Maß von einer andern, wenn es ein aliquotes Theil derselben, oder wenn sie in dieselbe dividirt ohne Rest ausgeht.
 Z. B. 24 hat das Maß 12, oder 8, oder 6, oder 4, oder 2.
 Wenn jede dieser Zahlen ein Maß von 24, dann jede Theil 24 ohne Rest, und ist zugleich ein aliquotes Theil.

Aufgabe. 5.) Zwey Zahlen mit einander zu dividiren.

Aufl. A 1 7 8 2 4 2 2 9 2 8. Q. 5 2 0 3

D (3 4 2 5 7 6) | 1 1 1

P 1 7 1 2 8 8 0 1 1 1

R 6 9 5 4 2 9 1 1

D (3 4 2 5 7 6) | 1 1

P 6 8 5 1 5 2 1 1

R 1 0 2 7 7 2 8

D (3 4 2 5 7 6)

P 1 0 2 7 7 2 8

R 0

Zusatz. Die *Multiplication*, und *Division* dienen einander zu Proben.

Anm. Die Rechnung mit *benannten Zahlen* bedarf keiner neuen Regeln, nur muß man wissen, wie viele Einheiten eines kleinern Namens auf eine Einheit des größern gehen. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heist die *Reductionszahl*.

4. Die Abmessung der Zahlen.

Erklärung. Eine Zahl heist ein *Maaß* der andern, wenn sie ein aliquoter Theil der andern ist, also in der andern aufgeht, d. i. wenn sie die andere, ohne Rest theilt.

A 3

Zu-

Zusatz. 1.) Jede Zahl wird *von ihr selbst* und *von der Einheit* gemessen.

2.) Jede Zahl, die eine andere misst, kann nicht grösser als die andere seyn.

3.) Eine Zahl A, die B misst, muss auch die Zahl C messen, die von B gemessen wird.

4.) Eine Zahl, die sich halbiren, d. i. durch zwey theilen lässt, ist eine *gerade* Zahl; eine *ungerade* aber, die sich *nicht* halbiren lässt, oder die von einer geraden um Eins unterschieden ist.

4) Jedes Produkt
wird von der Zahl
gemessen

§. 13.

Erklärung. Eine Zahl, die bloss von ihr selbst, und von der Einheit gemessen wird, ist eine *Primzahl*, *einfache Zahl*; eine *zusammengesetzte Zahl* aber, die auch noch von einer andern Zahl gemessen wird.

Zusatz. 1.) Jede *zusammengesetzte Zahl* A wird von irgend einer *Primzahl* gemessen.

2.) Jede Zahl ist entweder eine *Primzahl*, oder wird von einer *Primzahl* gemessen.

§. 14.

Erklärung. 1.) Ein *Maass* mehrerer Zahlen heiss das *gemeine Maass* derselben; das *grösste gemeine Maass* mehrerer Zahlen ist, wenn

Zusatz I. Jede Zahl wird von ihr selbst und der Einheit gemessen.
So kann 6 durch sich selbst, und durch die Einheit gemessen
werden. Da jede Zahl ist ein aliquoter Theil von sich selbst, und
kann ohne Rest dividirt werden.

Zusatz II. Wäre das Maß größer als die Zahl das gemessen werden
soll, so könnte es kein aliquoter Theil von dieser, d. h. es könn-
te nicht in diese dividirt, da doch dies von einem jedem Maß
unumgänglich nothwendig ist.

Zusatz III. Wenn eine Zahl gegeben ist, und diese von einer andern gemessen
wird, diese zweyte aber von einer andern dritten gemessen
wird, so muß diese dritte auch die erste messen. Der 1ste Maß
muß ein aliquoter Theil von dem Seyn, das gemessen werden
soll, und aber wird dieser aliquote Theil wieder von einem ali-
quoter Theil gemessen, d. h. dieser aliquote Theil von dem 2ten
wird wieder von einer Zahl gemessen, die ein aliquoter Theil des
aliquoten Theils ist; also muß der aliquote Theil des aliquoten
Theils auch die dritte Zahl messen. Z. B. C ist die Zahl
die gemessen werden soll durch B; B aber soll durch A gemessen
werden, also muß auch A, C, messen. Das

24 soll gemessen werden durch 12, 12 ist ein
aliquoter Theil von 24. 12 wird aber gemessen
durch 6, welches ein aliquoter Theil von 12 ist,
also kann auch 6, 24, messen, weil es auch
ein aliquoter Theil von 24. Da sagte ich
6 viermal zu sich so geht es mit der ganzen
Produkt 24.

Zusatz III. Jedes Produkt wird von ihren Faktoren gemessen. Wir nehmen z. B.: 24
als das Produkt, und die Faktoren 4, und 6. Beide Faktoren messen die
Zahl 24, Sie sind aliquote Theile davon. — Jede Zahl, die sich
durch 2 Theilen löst, ist eine gerade; und da dies nicht zuläßt, eine
ungerade. 5 ist eine ungerade Sie löst sich nicht durch 2 Theile, da
hingegen 6 dies zuläßt.

§ 13.

Eine Primzahl ist eine Zahl, die außer von sich, und von der Einheit, von
keiner Zahl kann gemessen werden. So ist 2 eine Primzahl, sie kann nur von sich
und von der Einheit gemessen werden. Aufanigesetzt aber heißt eine Zahl, die
sie auch von andern Zahlen kann gemessen werden. Z. B. 6 8 10. u. s. w.

Zusatz I. Jede Infim angelegte Zahl ist in irgend einer Primzahl gemessen. Voran ist selbe schon nicht gleich finde. So muss ich herunter steigen bis ich selbe finde. So wird z. B. gemessen 24 durch 12, durch 8, 6, 4, und durch 3. Die letzteren waren lauter Infim angelegte Zahlen. Nur 3, und auch 2 kann sind Primzahlen. Sie lassen durch nichts andern, es durch die Einheit und sich selbst messen.

Zusatz II. Aus folgt ganz natürlich, dass eine jede Zahl entweder eine Primzahl ^{se} ist oder von einer Primzahl gemessen werde.

§ 14.

a) Ein Maass mehrerer Zahlen heißt das gemeine Maass derselben, und das größte heißt es, ein kein größeres mehr kann aufgefunden werden. So ist z. B. von 36 und 12 das größte gemeinschaftliche Maass 12 selbst. 36 könnte ich zwar durch ~~24~~ ¹⁸ auch messen, aber nicht 12, das Maass war größer als das gemeine Maass.

b) Zahlen, die außer nur die Einheit zu ihrem gemeinen Maass haben, heißen relative Primzahlen. So sind zum B. 2 und 3 ^{oder 5} relative Primzahlen, sie haben kein größeres ^{gemeins} Maass als die Einheit. Relative Primzahlen sind z. B. 3, und 4, sie haben als absolute betrachtet kein gemeinschaftliches Maass, als 1.

Zusatz. Wenn man zwei ganze Zahlen, durch ihr größtes gemeinschaftliches Maass dividirt, so müssen die Quotienten Primzahlen sein: z. B.

$$\frac{a}{m} = g \quad \text{und} \quad \frac{b}{m} = q.$$

Wären aber diese Quotienten keine Primzahlen, so wäre m nicht das größte gemeinschaftliche Maass. Denn der Divisor $m \cdot g = a$ und $m \cdot q = b$. Nun, dividire ich diese Quotienten mit einem andern gemeinschaftlichen Maasse, welches wir n setzen wollen, so giebt es wieder einen Quotienten, nemlich.

$$\frac{g}{n} = k \quad \text{und} \quad \frac{q}{n} = l.$$

Nun kann ich aber gleiches für gleiche Substitutionen: oder $n \cdot k = g$, und $n \cdot l = q$. alles kann ^{man} anstatt g , setzen kn , und anstatt q ln . - also ist n nicht das größte gemeinschaftliche Maass.

$$\frac{a}{m} = g \quad \frac{b}{m} = q$$

$$g \cdot m = a \quad m \cdot q = b$$

$$\frac{g}{n} = k \quad \frac{q}{n} = l$$

$$n \cdot k = g$$

$$n \cdot l = q$$

also war kn das größte gemeinschaftliche ^{Maass} ~~Maass~~

wenn sich kein grössers angeben lässt, welches in jeder dieser Zahlen aufgeht.

b.) Zahlen, die *ausser der Einheit* kein anderes gemeinsames Maass haben, heissen *Primzahlen zu einander*, oder *relative Primzahlen*.

Zusatz. 1.) Wenn man zwei ganze Zahlen A, B, durch ihr *grösstes gemeinsames Maass* dividiret; so sind die *Quotienten Primzahlen unter sich*.

2.) Wenn zwei ganze Zahlen A, B, jede für sich durch eine dritte ganze Zahl theilbar ist; so ist es auch ihre *Summe* $A + B$ sowohl, als ihre *Differenz* $A - B$.

3.) Wenn die *Summe*, oder *Differenz* $A \pm B$ zweier ganzen Zahlen für sich, und eine der Zahlen auch für sich durch M theilbar ist, so muss es auch die *andere* seyn.

4.) Wenn die *grössere* Zahl A durch die *kleinere* B theilbar ist; so muss die *kleinere* Zahl B, das *grösste gemeinsame Maass* der Zahlen A, B, seyn.

§. 15.

Lehrsatz Wenn von zwey ungleichen Zahlen A, B, die kleinere B in die grössere A dividirt, einen Rest R, und Quotienten Q giebt; der Rest R in den vorigen Divisor B einen

Quo-

Quotienten Q^{2te} und einen Rest R^{2te} und so fort immer die Division *jedes vorhergehenden Restes* mit dem *nächstfolgenden* fortgesetzt wird, bis der Rest $= 0$ wird; so

a) ist entweder der *Divisor* bey der *nten* Division, die ohne Rest erfolgt ist, > 1 ; und dann ist er *das grösste gemeine Maass*

1.) des *Divisors*, und *Dividendus* bey dieser *nten* Division;

2.) des *Divisors*, und *Dividendus* bey der $(n - 1)$ *ten* Division;

3.) des *Divisors*, und *Dividendus* bey *jeder vorhergehenden*, $(n - 2)$ *ten*; $n - 3$ *ten* u. f. w. Division.

4.) und der *gegebenen Zahlen* A, B.

b) oder der *Divisor* bey der *nten* Division, die ohne Rest erfolgt, ist $= 1$; so haben

1.) der *Divisor*, und *Dividendus* bey dieser *nten* Division.

2.) der *Divisor*, und *Dividendus* bey der $(n - 1)$ *ten* Division;

3.) der *Divisor*, und *Dividendus* bey *jeder vorhergehenden* Division;

kein gemeinsames Maass; und

4.) die *gegebenen Zahlen* A, B. sind *Primzahlen* zueinander.

Der

$$\begin{array}{r} B|A|Q \\ \hline Q'|B|Q \\ \hline Q''|Q'|Q \\ \hline Q'''|Q''|Q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 12 \\ \hline & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ich dividire rechnerisch A durch B, welches einen Quotienten giebt, und einen Rest.
 Da $12 = 5 \times 2 + 2$. Der Rest ist gleich dem ganzen, was ich den Divisor Multipli-
 cire mit der Quotienten, und ~~das Produkt~~ ^{das Produkt} ~~subtrahiere~~ ^{subtrahiere}. $5 \times 2 = 10$. Nun ist der Rest 2.
 gleich dem ganzen 12, was ich rechnerisch den Divisor multipliziert mit der Quo-
 tienten h.e. $2 = 12 - 5 \times 2$. und so ist es bei allen andern Divisionen, bis der
 Rest 0 wird. Das sagt man der Divisor von letzten Divisionen ist das grö-
 ßte gemeinschaftliche Maß von allen. Nämlich der letzte Divisor ist das gemein-
 same größte Maß von 12, und von dem Dividenden. Nun aber ist der Divisor das größte Maß
 von ~~den Zahlen~~ ^{den Zahlen}, so muß es auch das größte von seinen aliquoten Teilen 2, 3, 4, 6, 12
 sein. Er dividirt beide ohne Rest, er ist aber auch das größte, den 2 könnte ich wohl
 mit 2 dividiren, aber 2 ist größer als das zugehörige, nämlich 1, welches mit
 2 nicht theilbar ist. 1 ist auch das größte Maß von 5, und 2, ~~den sonst haben sie~~ ^{den sonst haben sie} ~~keins~~ ^{keins}
 gemein. 1 ist auch das größte, den ich kein andres finden. Der Rest ist rechnerisch
 gleich, da $1 = 5 - 2 \times 2$. Nun ist aber 1 das größte gemeinsame Maß von
 2, und 2, also muß es auch von 5 sein. Das heißt die Summe der Divisoren $2 + 2 + 2 = 6$
 einen Theil theilbar so muß es auch die andere sein. Nun sind diese Theile gleich
 der Summe 5-1, also muß 1 das größte gemeinsame Maß von 2, 5, und 12 sein.
 Nun ist aber 1 auch das größte gemeinsame Maß von 12, da Rest 2 = 12 -
 5×2 . Nun ist aber 1 das größte Maß von 5 und 2, welche Theile des ganzen sind
 also muß es auch das größte Gemeinschaftliche von 12 sein aus der oben angeführ-
 ten Ursache. Er ist das größte, den ich könnte 12 wohl mit einem andern Maß thei-
 len, aber nicht 5, 2, 1. Also ist 1 das größte Gemeinschaftliche Maß von 12
 5, 2, und 12 selbst.

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 12} 2 \\ \underline{2} \\ 5 \overline{) 2} \\ \underline{1} \\ 2 \overline{) 2} \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 1 \times 0 \\ 1 &= 5 - 2 \times 2 \\ 1 &= 12 - 5 \times 2 \end{aligned}$$

§ 16.

Man findet auf folgende Art das gemeinschaftliche größte Maass von zwey Zahlen die nicht
Primzahlen sind. Man dividirt die zwey gegebene Zahlen, wie oben gesagt worden, bis der
Rest Null ist.

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 111} \\ \underline{6} \\ 5 \end{array}$$

Also ist a das große gemeinschaftliche Mops. von 5 , von 5 , und 6 .

Aufz II. Wenn zwei Zahlen ^{ganze} Zahlen A, B jede für sich durch eine dritte ganze Zahl theilbar ist, so ist es auch ihre Summe $A + B$ sowohl als ihre Differenz $A - B$. Z. B.

$$12 + 4 = 16. \quad 12 - 4 = 8.$$

Hier ist 4 sowohl für 12 als für 16 das größte gemeinschaftliche Maass.

Aufz III. Wenn die Summe von zwei Zahlen durch m theilbar ist, und auch eine von den zwei Zahlen durch n theilbar ist, so muss auch die andere durch n theilbar sein. Z. B.

16 ist theilbar durch 4 als dem gemeinschaftlichen Maass, 12 ist es auch, also muss es auch die Summe sein, 28.

$$\frac{28}{4} = 7 \text{ ohne Rest. } \frac{16}{4} = 4 \text{ ohne Rest. } \frac{12}{4} = 3 \text{ ohne Rest.}$$

Aufz III. Wenn die grössere Zahl A durch die kleinere B theilbar ist, so muss die kleinere Zahl B das größte gemeinschaftliche Maass der Zahlen A, B, sein. Z. B.

$$\frac{12}{6} = 2. \quad \frac{6}{6} = 1.$$

also ist 6 das größte gemeinschaftliche Maass von 6, und 12.

§ 15.

Wenn von zwey Zahlen, die ungleich sind, die kleinere in die grössere dividirt wird, und einen Quotienten giebt; der Rest in den vorigen Divisor einen Quotienten, und einen Rest giebt, und so fort immer die eine Division eine vorhergehende Rest mit dem Divisor der vorhergehenden fortgesetzt wird, bis der Rest 0 wird. So ist a) Ertheilt der Divisor bey der nten Division, die ohne Rest erfolgt ist, > 1 und dann ist er das größte gemeine Maass von dem Divisor, und Dividendus der nten, und von allen vorhergehenden, Divisoren, und auch der Zahlen A, B. —

Beweis. Ich setze Z. B. zwey Zahlen A, B, diese dividirt geben zusammen genommen einen Quotienten, und lassen noch einen Rest, der kleiner sein muss, als der erste Divisor, den weil er grösser, so würde es sein, dass der erste Divisor öfters in Dividendus enthalten sey, als der Quotient angebe. also muss er kleiner seyn. Nun eben deswegen weil er kleiner ist, als der vorige Divisor, kan er wieder in diesen Divisor öfters enthalten werden, der dann wieder einen Quotienten, und Rest liefert, der aus der oben angeführten Ursache immer kleiner seyn muss, als der vorige. Und so wird es fortgemacht, bis bey einer Division zwar ein Quotient, aber der Rest 0, d. h. kein Rest mehr da ist. Dann sagt man, der Divisor von der kten Divisor sey das größte gemeinschaftliche Maass, und beweist es wie folgt.

Der Beweis wird durch folgende Tafel anschaulich.

$$\begin{array}{r}
 B \mid A \mid Q \\
 \hline
 R \mid B \mid Q^{2te} \\
 \hline
 R^{2te} \mid R \mid Q^{3te} \\
 \hline
 R^{3te} \mid R^{2te} \mid Q^{4te} \\
 \hline
 R^{4te} \text{ \&c. \&c.}
 \end{array}$$

§. 16.

Aufgabe. 1.) Für zwey Zahlen A, B, die nicht Primzahlen zueinander sind, das grösste gemeine Maafs zu finden.

Aufl. a.) $B \mid A \mid Q = 4 \mid 8 \mid 2$
 R

b.) $B \mid A \mid Q = 9 \mid 15 \mid 1$
 $R \mid B \mid Q^2 = 6 \mid 9 \mid 1$
 $R^2 \mid R \mid Q^3 = 3 \mid 6 \mid 2$
 $R^3 = 0$

2.) Für drey Zahlen A, B, C, die nicht Primzahlen zueinander sind, das grösste gemeine Maafs zu finden.

Aufl. a.) $A = 8 \quad B = 6 \quad C = 4$

$B \mid A \mid Q = 6 \mid 8 \mid 1$
 $R \mid B \mid Q^2 = 2 \mid 6 \mid 3$
 $R^2 = 0$

Von (.)

C

R.

$$\frac{R}{R^2} \mid \frac{C}{R^2} \mid \frac{Q}{R^2} = \frac{2}{0} \mid \frac{4}{0} \mid \frac{2}{0}$$

Aufl. b.) $A = 18 \quad B = 12 \quad C = 4$

$$\frac{B}{R} \mid \frac{A}{R} \mid \frac{Q}{R} = \frac{12}{0} \mid \frac{18}{0} \mid \frac{1}{0}$$

$$\frac{R}{R^2} \mid \frac{B}{R^2} \mid \frac{Q}{R^2} = \frac{6}{0} \mid \frac{12}{0} \mid \frac{2}{0}$$

$$\frac{C}{r} \mid \frac{R}{r} \mid \frac{Q}{r} = \frac{4}{0} \mid \frac{6}{0} \mid \frac{1}{0}$$

$$\frac{r}{r^2} \mid \frac{C}{r^2} \mid \frac{Q}{r^2} = \frac{2}{0} \mid \frac{4}{0} \mid \frac{2}{0}$$

Anmerk. Auf eben diese Art findet man auch das größte
gemeine Maass für vier und mehrere Zahlen.

5. Die Rechnung mit Brüchen.

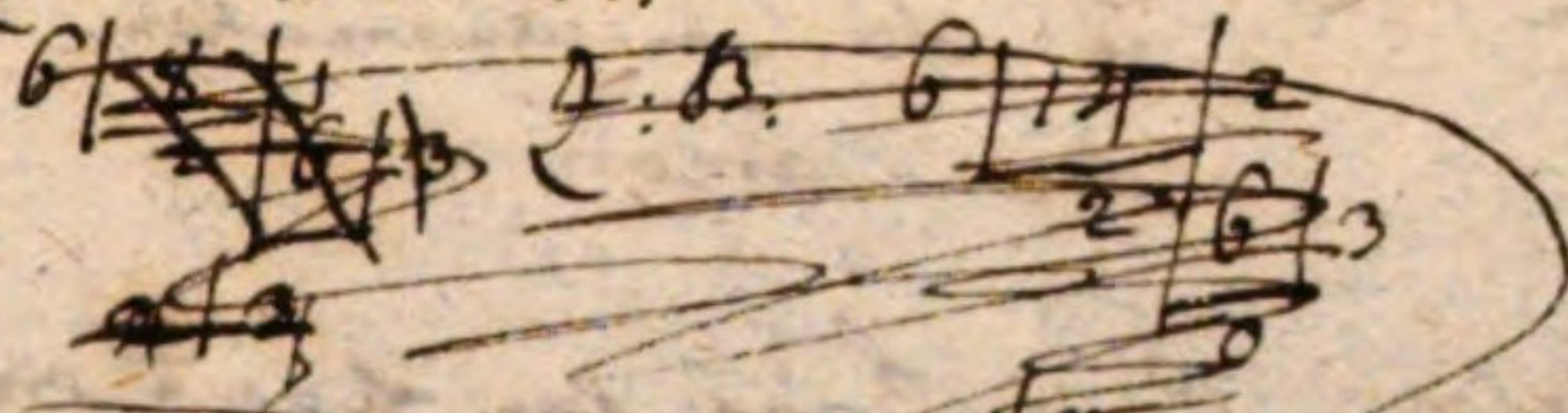
Erklärung. Wenn man ein Ganzes in etliche gleiche Theile entheilet und davon entweder einen, oder etliche nimmt; so heißt dieses Stück in Vergleichung mit dem Ganzen, ein Bruch Fractio.

Zusatz. 1.) Zu einem Bruche sind zwey Zahlen, Glieder, Termini, nothwendig; die Zahl der Theile, in welcher man das Ganze getheilt hat, — der Nenner; und die Zahl der Theile, die man nimmt, — der Zähler; die sen setzt man über einem Striche, den Nenner dar unter.

2.) Von

Man findet für 3 Zahlen. Das gemeinschaftliche Größte Maß, wenn man sie wie oben dividirt, und dann erst der dritte mit den Divisoren der zweyten mit der Bestimten Zahl dividirt.

Z. B.



24, 18, 6 sind die drei Zahlen, also dividire ich die ersten zwey in einander, und dann erst der dritte der dritte des dritten Z. B. $24/18/1$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 24} \quad 4 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$6/6/1$$

Also ist 6 das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 24, 18, 6.

Auf die nämliche Art kan ich auch finden von 4 Zahlen den gemeinschaftlichen größten Maaß. Z. B. 23 15 11 9

$$\begin{array}{r} 15/23/1 \\ 8 \overline{) 15} \quad 1 \\ 7 \overline{) 8} \quad 1 \\ 1 \overline{) 7} \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9/11/1 \\ 2 \overline{) 9} \quad 4 \\ 1 \overline{) 2} \quad 2 \\ \underline{0} \end{array}$$

Also ist ein das größte allgemeine Maaß von 23, 15, 11, 9.

Die Lehren mit Brüchen.

Ein Bruch ist eine Zahl, die in mehrere gleiche Theile eingetheilt ist, und von der wieder einer, oder mehrere weggenommen werden. Wenn ich also Z. B. $\frac{3}{4}$ sage ich, dieses Ganze ist eingetheilt in vier Theile, wovon ich aber wieder drei wegnehme.

In jedem Bruch sind zwey Zahlen. nothwendig, der Nenner, und der Zähler. Der Nenner heißt jene Zahl, die anzeigt, wie viele Theile eine Zahl eingetheilt ist, Zahlen als jene, welche uns sagt wie viele Theile von ganzen weggenommen werden. So Z. B. $\frac{1}{4}$ giebt der 4 an, in viele Theile das ganze getheilt ist, und 1 wie viel von ganzen weggenommen werden.

II/ Zusatz. Bei jeder Brüche bestimmt der Zähler die Menge der Theile, die ihn ausmachen, und der Nenner gibt den Bruchtheil der Namen

III Zusatz. Ein Bruch den abseits ein Vielfaches von irgend einem Theile des ganzen, oder von der Einheit liegt.

III Zusatz. Es giebt dreierley Arten von Brüchen, nemlich den echten den uneigentlichen, und den unechten.

a) Echt heißt der Bruch dann, wenn der Zähler eine geringere Größe ist, als der Nenner / d.h. Wenn der Zähler weniger Dinge vor einerley Art in sich schließt, als der Nenner.

b) Uneigentlich, wenn der Zähler gleiche Größen hat, als der Nenner. Z.B. $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{6}{6}$

c) Wenn er mehrere Zahlen in sich schließt als der Nenner hat Z.B. $\frac{16}{8}$ $\frac{15}{3}$ $\frac{29}{6}$

IV Zusatz. Wenn man von den Größen die das ganze ausmachen, einige und noch ein Stück einer solchen Größe wegnimmt, so wird der Zähler eine gemischte Zahl. Z.B. Ich nehme von einem ganzen A, B weg, nehme aber noch ein Stück $\frac{a}{b}$, so ist der Zähler eine gemischte Zahl. $5\frac{1}{4}$

V Zusatz. Das die Brüche eigentliche formeln sind, die der Quotienten, aus der Division mit dem Zähler mit dem Nenner sein, ist leicht einzusehen. Z.B.

$$\begin{array}{r} 26 \\ 3 \overline{) 78} \\ \underline{60} \\ 18 \\ 18 \\ \underline{0} \end{array} = 26\frac{26}{46}$$

2.) Von den Gliedern eines Bruches ist der *Zähler* die eigentliche Zahl, und der *Nenner* der Name. Dieser giebt dem Bruche den Namen, jener zählt die Menge der Theile, die ihn ausmachen.

3.) Ein Bruch ist das *Vielfache* von einem gewissen Theile des Ganzen, oder der Einheit.

4.) Ist das Ganze in gewisse Theile getheilt: so kann man einen solchen Theil so vielmal nehmen, daß solches

a.) entweder *weniger als das Ganze* ausmacht — ein *ächter Bruch*, *Fraçtio vera*;

b.) oder *eben so viel*; — ein *uneigentlicher Bruch*;

c.) oder *mehr*; — ein *unächter Bruch*.

5.) Sollte man von den *Größen*, die das Ganze ausmachen, *einige*, und noch ein Stück einer solchen Größe nehmen; so würde der *Zähler des Bruches* eine *gemischte Zahl*, sollten aber von einer Größe einige, und noch ein Stück solcher Größe auf das Ganze gehen, so würde der *Nenner des Bruches* eine *gemischte Zahl*.

6.) Die Brüche sind eigentlich Formeln, die den *Quotienten* aus der Division des Zählers mit dem Nenner anzeigen; und die man anstatt des Quotienten selbst gebrauchen kann; weswegen man sie auch als Quotienten ansieht.

§. 18.

Lehrsatz. Die Grösse der Brüche beruhet bey einerley Nenner auf der Grösse der Zähler; bey einerley Zähler auf der umgekehrten Grösse der Nenner.

Beweis. Denn bey einerley Nenner, oder bey der gleichen Grösse der Theile ist ein Bruch um so vielmal grösser, um so vielmal grösser sein Zähler ist, oder jemehr man solche Theile nimmt; — bey einerley Zähler hingegen, oder bey der gleichen Anzahl der Theile, ist ein Bruch um so vielmal grösser, um so vielmal kleiner sein Nenner ist; oder um so vielmal grösser die Theile sind.

Zusatz. 1.) $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{4:2}; \frac{A}{B} \cdot D = \frac{A \cdot D}{B} = \frac{A}{B:D}$

2.) $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{6}{7 \cdot 3}; \frac{A}{B} : D = \frac{A:D}{B} = \frac{A}{B \cdot D}$

3.) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}; \frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$ und $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3}; \frac{A}{B} = \frac{A:D}{B:D}$

4.) $\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3; \frac{A}{B} \cdot B = A$

5.) $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 4}{4}; A = \frac{A}{1} = \frac{A \cdot B}{1 \cdot B}$

Satz. Die Größe der Brüche beruht bei einerley Nenner auf der Größe der Zähler; bei einerley Zähler auf der umgekehrten Größe der Nenner. Oder Wenn mehrere Brüche einerley Nenner, d.h. einer gemeinschaftlichen Nenner haben, so kommt es auf die Größe der Zähler in Ansehung der Größe der Brüche an, und so auch umgekehrt.

Zusatz I. Ein Bruch wird durch eine ganze multipliciert, wenn ich entweder seinen Zähler multipliciere, oder den Nenner dividire. Z.B. $\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{2}{\frac{3}{2}}$.

Zusatz II. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn ich entweder seinen Zähler dividire, oder den Nenner multipliciere. Z.B. $\frac{5}{6} : 3 = \frac{5 : 3}{6} = \frac{5}{7.3}$.

Zusatz III. Der Nenner eines Bruchs bleibt immer der nämliche, wenn ich sowohl seinen Zähler als Nenner mit einer ganzen Zahl dividire oder multipliciere. Z.B. $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}$ oder $\frac{8}{10} = \frac{8 : 2}{10 : 2}$.

Zusatz IV. Ist die ganze Zahl, die der Multiplicator gleich dem Nenner, so giebt mir die Multiplication allzeit wieder den Zähler. Z.B. $\frac{5}{6} \cdot 6 = \frac{5 \cdot 6}{6} = 5$.

Zusatz V. Man kan eine ganze Zahl durch verschiedene Brüche ausdrücken. Z.B. $5 = \frac{5}{1} = 4 \frac{1}{1} = 4 + 1 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 4}{4}$.

Ein Bruch auf eine kleinere, der seine kleinste Bezeichnung zu bringen, heißt ihn aufheben, der einen Bruch durch die kleinste Zahlen ausdrücken, ohne seinen Werth zu ändern.

Z. B. $\frac{1464}{6382}$ soll durch seine kleinste Zahlen ausgedrückt werden. Man muß also eines für beides gemeinlich suchen, den Zähler, den Nenner dividieren.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 1464 : 24 \\ \hline 61 \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 6382 : 15 \\ \hline 425 \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 4697 : 42 \\ \hline 111 \\ 5 \end{array}$$

Also ist der Bruch $\frac{1464}{6382} = \frac{24}{425}$. Nehmlich durch Division des Zählers, und Nenners durch eine gewisse dritte Zahl habe ich den Bruch aufgelöst, und ihn auf eine kleinste Bezeichnung herüberge-
setzt ohne jedoch seinen Werth etwas zu ändern. Der ich habe
sowohl den Zähler, als den Nenner mit einer und der nämli-
chen Zahl dividirt.

I Anmerkung. War Zähler und Nenner nur die Einheit zu ihren größter ge-
meinschaftlichen Masse haben, so kann der Bruch gar nicht
aufgelöst werden. Z. B. $\frac{11}{9}$ kann nicht aufgelöst werden.

II. Es giebt noch eine andere Methode, Brüche aufzulösen;
die Factors sind nemlich schon gegeben, dieß dann in einander
dividirt haben den Bruch auf.

Definition. Brüche unter einerley Bezeichnung bringen, heißt, andere
den gegebenen, gleiche Brüche die finden, die einen
General Nenner haben.

§. 19.

Erklärung. Einen Bruch *aufheben* heisst, ihn auf eine *kleinere*, oder die *kleinste Benennung* bringen, oder ihn durch kleinere, oder die kleinsten Zahlen ausdrücken, *ohne seinen Werth zu ändern*.

Aufgabe. Einen Bruch aufzuheben.

$$\frac{1464:61}{4697:61} = \frac{24}{77}$$

Anmerkung. 1.) Haben *Zähler* und *Nenner* eines Bruchs die *Einheit* zum *grössten gemeinen Maaße*: so lässt sich der Bruch nicht aufheben.

2.) Eine *Methode*, Brüche aufzuheben ist auch folgende:

$$\frac{2310}{9350} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{17 \cdot 5} = \frac{21}{85}$$

Man kann hier die schon berechneten Factorentafeln mit Nutzen gebrauchen.

§. 20.

Erklärung. Brüche *gleichnamig* machen, oder, *unter einerley Benennung* bringen, heisst, andere, den gegebenen, gleiche Brüche finden, die einerley *Nenner*, oder einen *Generalnenner* haben.

Aufgabe. Brüche gleichnamig zu machen.

Aufl. Aus $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ wird $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}$ und $\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4}$.

Aus $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ werden $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{70}{105}$; $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{84}{105}$

und $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{90}{105}$

§. 21.

Aufgabe. 1.) Brüche zu addiren; oder zu subtrahiren.

Aufl. $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 5 \cdot 4}{4 \cdot 9} = \frac{27 + 20}{36}$

und $5\frac{6}{7} - \frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 7 + 6}{7} - \frac{5 \cdot 7 + 6}{7} = \frac{35 + 6}{7} = \frac{41}{7}$

Zusatz. 1.) $4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3}$; und $4 - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 2}{3}$

2.) $8\frac{3}{4} - 3\frac{2}{4} = \frac{35}{4} - \frac{11}{4} = 8\frac{24}{4} = 8\frac{6}{1} = 8\frac{3}{2}$

$(\frac{3}{4} - \frac{2}{3})$

Eben so ist $5\frac{6}{7} = 4\frac{1}{7}$.

§. 22.

Man multiplicirt eben alle $\frac{5}{6}$ Nenner mit einander, um eine
 gemeinschaftlichen Nenner zu bekommen. Dann werden ^{jeder} die Zähler
 mit den allen Nennern, außer mit seinem Eigenen, multipli-
 cirt. Z: B.

$\frac{5}{6} \frac{6}{7} \frac{7}{8} \frac{8}{9}$. Diese Brüche sollen nun unter eine
 gleiche Nennerung gebracht werden. Ich verfähre also wie gesagt.

$$6 \times 7 = 42 \times 8 = 336 \times 9 = 3024.$$

Also $6 \times 7 \times 8 \times 9 = 3024$, und der gemeinschaftliche große Nenner

Aus diesen Brüchen werden also $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2520}{3024}$;
 $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 6}{7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2519}{3024}$; $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9}{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{2646}{3024}$; $\frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{2688}{3024}$.
 Also $\frac{2520}{3024} \quad \frac{2519}{3024} \quad \frac{2646}{3024} \quad \frac{2688}{3024}$

§ 21.

Reducirt man Brüche zu Brüchen, so verfährt man auf folgende
 Art. Man multiplicirt den Nenner des ersten, mit dem Zähler des
 andern, und auch die beiden Nenner so multiplicirt man gesondert
 dann sind sie addirt. Z: B. $\frac{3}{6} \frac{4}{9}$. Ich multiplicire also wie gesagt
 $3 \times 9 = 27 + 4 \times 6 = 24$, die Nenner $6 \times 9 = 54$. Also ist hier
 Stellung folgende: $\frac{27 + 24}{54}$.

Satz I. Ist bei dem ganzen noch ein Bruch angebracht, so multipli-
 cirt man das ganze mit dem Nenner des Bruchs und addirt
 dann den Zähler. Z: B. $6 \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4 + 3}{4}$ und $6 - \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3 - 2}{3}$.

Satz II. Sind zwei ganze Zahlen gegeben, und hat jede einen Bruch
 bei sich, so verfährt man, wie Satz I gesagt worden.

Z: B. ~~$\frac{6 \cdot 4 + 3}{4} + \frac{6 \cdot 3 - 2}{3}$~~

$$6 \frac{3}{4} + 3 \frac{3}{6} = \frac{27}{4} + \frac{21}{6} = 6 + 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{6}$$

Anmerkung. Bei der Subtraction hat man die nämlichen Regeln
 zu beobachten, nur mit dem Unterschiede, daß man hier
 subtrahirt, was dort addirt.

Um Brüche mit Brüchen zu multiplizieren, verfährt man auf folgende Art. Man kann nämlich den ersten Bruch mit dem Zähler des zweiten Multiplizieren, und das ganze dann mit dem Nenner des zweiten dividieren. Der Multiplikator ist also der ganze erste Bruch mit dem Nenner, so ist er um so vielmal größer, kleiner, als der Nenner des zweiten Einheiten enthält. Der die Größe der Brüche beruht auf der Anzahl Nenner auf der entgegengesetzten Größe der Zähler und so auch umgekehrt. — Man kann auch die Nenner mit Nenner und die beiden Zähler dividieren, oder multiplizieren. Z: B:

$$\frac{8}{16} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{8}{16} \cdot 3 \right) : 4 = \frac{8 \times 3}{16 \times 4} = \frac{8:4}{16:3}$$

So kann ich auch den Nenner des Bruchs, der zu multiplizieren ist, mit dem Zähler, und seinen Zähler mit dem Nenner des anderen dividieren, und das ganze Produkt, wieder zu multiplizieren. Z: B:

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{(10:5) \cdot 2}{11}$$

Oder so kann ich auch den Nenner des ersten Bruchs mit der Zähler des zweiten dividieren, und dann das Produkt mit dem Nenner des zweiten Multiplizieren. Z: B:

$$\frac{33}{35} \cdot \frac{7}{8} = \frac{33}{(35:7) \cdot 8}$$

Auf gleiche Weise verfährt man bei der Division. Man kann nämlich den Zähler des ersten mit dem Zähler des zweiten Bruchs dividieren, und den Nenner des ersten stehen lassen, das Produkt wird dann multipliziert mit dem Nenner des zweiten. Z: B: $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = \left(\frac{21}{32} : 3 \right) \cdot 8$
Oder man kehrt den zweiten Bruch als der Divisor um, d. h. man setzt nämlich den vorigen Nenner als Zähler, und den Zähler als Nenner, und multipliziert so beide Zähler und Nenner, da dividirt beide Zähler nach ihrer ersten Angabe, und Nenner. Z: B: $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = \frac{21 \cdot 8}{32 \cdot 3} = \frac{21:3}{32:8} = \frac{7}{4}$

Aufg I. Sind beide Brüche gemischte Zahlen, so d. h. sind den ganzen Zahlen der Brüche angehängt, so zieht man einen unechten Bruch heraus. Z: B: $\left(8 \frac{3}{4} \right) : \left(4 \frac{2}{9} \right) = \frac{35}{4} : \frac{14}{9} = \frac{35}{4} \cdot \frac{9}{14}$

§. 22.

Aufgabe. 2.) Brüche miteinander zu multipliciren, oder zu dividiren.

Aufl. der Multiplication

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{9}{14} \cdot 2 \right) : 3 = \frac{9 \cdot 2}{14 \cdot 3} = \frac{9 : 3}{14 : 2}$$

$$\text{So auch;} \quad \frac{10}{11} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{10}{11} \cdot 2 \right) : 5 = \frac{10 \cdot 2}{11 \cdot 5} = \frac{(10 : 5) \cdot 2}{11}$$

$$\text{So auch} \quad \frac{33}{35} \cdot \frac{7}{8} = \left(\frac{33}{35} \cdot 7 \right) : 8 = \frac{33 \cdot 7}{35 \cdot 8} = \frac{33}{(35 : 7) \cdot 8}$$

$$\text{Zusatz.} \quad \left(4 \frac{2}{3} \right) \cdot \left(2 \frac{3}{4} \right) = \frac{14}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{14 \cdot 11}{3 \cdot 4}$$

Aufl. der Division

$$\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = \left(\frac{21}{32} : 3 \right) \cdot 8 = \frac{21}{32} \cdot \frac{8}{3} = \frac{21 \cdot 8}{32 \cdot 3} = \frac{21 : 3}{32 : 8} = \frac{7}{4}$$

$$\text{So auch} \quad \frac{12}{17} : \frac{4}{9} = \left(\frac{12}{17} : 4 \right) \cdot 9 = \frac{12}{17} \cdot \frac{9}{4} = \frac{(12 : 4) \cdot 9}{17} = \frac{27}{17}$$

$$\text{So auch} \quad \frac{17}{24} : \frac{5}{8} = \left(\frac{17}{24} : 5 \right) \cdot 8 = \frac{17}{24} \cdot \frac{8}{5} = \frac{17}{24 \cdot 5} = \frac{17}{(24 : 8) \cdot 5} = \frac{17}{15}$$

$$\text{Zusatz. 1.)} \quad \left(4 \frac{2}{3} \right) : \left(2 \frac{3}{4} \right) = \frac{14}{3} : \frac{11}{4} = \frac{14}{3} \cdot \frac{4}{11}$$

2.)

$$2.) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}.$$

Anmerk. Eine *benannte* Zahl, sie mag ganz, oder gebrochen seyn, wird *reducirt*, d. i. auf den kleinern, oder größern Namen gebracht, wenn man dieselbe mit der *Reductionszahl* im ersten Falle *multiplicirt*, im zweyten *dividirt*.

6.) Die Rechnung mit entgegengesetzten Größen.

§. 18.

Erklärung. *Entgegengesetzte Größen* heißen Größen von einerley Art, die man zugleich in solcher Beziehung betrachtet, dafs sie einander ganz, oder zum Theil aufheben.

Zusatz. 1.) Man *bezeichnet* die eine der entgegengesetzten Größen mit (+) und die andere mit (-); und nennt die Größen mit dem ersten Zeichen *bejahende*, oder *positive*; mit dem zweyten, *verneinende*, oder *negative* Größen.

2.) Es ist willkührlich, welche von beyden Größen man *positiv*, oder *negativ* nennen will. Bey allen entgegengesetzten Größen legt man aber immer die *positive Einheit* zum Grunde, so dafs alle Zahlen, die aus solcher Einheit selbst entstehen, *positiv* sind,

Ein Graben wird fertig gemacht von 3 Arbeitern
 einer gold der gewöhnliche Dritte
 45 Gulden, 31, 21, / bezahlet der Herr
 10 Reich für ungleiche Arbeit

$$a = x + y + z$$

$$p + q + r$$

$$x : y = p : q$$

$$y : z = q : r$$

$$x : y : z = p : q : r$$

$$p : x = q : y = r : z$$

$$(p + q + r) : (x + y + z) = p : x = q : y = r : z$$

Beispiel

$$(45 + 31 + 21) : 10 = 45x + 31y + 21z$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 150 \\ \hline 150 \end{array} \quad \begin{array}{r} 150 \\ 97 \\ \hline 588 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \\ 4 \end{array}$$

Drey Häufte gewins 4000 Thaler.
 der erst legte 10000 der zweyte 7000 der
 dritte 3000 was trift einem jeden

$$(10000 + 7000 + 3000)$$

$p \cdot x = q \cdot y \quad r = z$
 $\frac{20000}{4000} = \frac{10000 : x = 7000 : y = 3000 : z}{20000}$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 4000 \\ \hline 4000000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400000000 \\ 2 \\ \hline 000 \end{array} \Bigg| 2$$

$$20000 : 4000 = 10000$$

$$\frac{4}{2} \Bigg| 2000 \text{ Anteil}$$

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 1400 \\ 600 \\ \hline 4000 \end{array}$$

~~7000~~

~~$20000 : 4000 = 7000 : y$~~

$$\begin{array}{r} 20 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ 2 \end{array} \Bigg| 14000$$

$$1400$$

$$20000 : 4000 = 2000 : z$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 3 \end{array} \Bigg|$$

find, und die *negativen* Zahlen erhalten werden, wenn man das, der positiven Einheit Entgegengesetzte etlichemal nimmt.

3.) Keine Gröſſe ist *an sich negativ*; sondern wird es erst durch die *Entgegensetzung* mit dem Positiven, und bedeutet alsdann nicht bloß den *Mangel* des Positiven, sondern seine *Beraubung*.

4.) Das *Kleinere* hebt in entgegengesetzten Gröſſen so viel auf, als es selbst beträgt; und der Rest muß von der *Art des Größern* seyn, das sowohl *positiv*, als *negativ* seyn kann.

5.) Sind *gleiche* Gröſſen einander *entgegengesetzt*; so heben sie einander ganz auf, daß *Null* der Rest wird. Dieses hat veranlaßt, die *negativen* Gröſſen *weniger als Nichts* zu nennen, das man aber nur in *Beziehung auf die ihr entgegengesetzte* Gröſſe, nicht aber überhaupt sagen kann; daher ist $0 - 3$ kein richtiger Ausdruck.

6.) $A \times B - B = A \times 0 = A$.

§. 24.

Aufgabe. 1.) Zahlen mit einerley, oder verschiedenen Zeichen *einander zu addiren*.

D

Auß.

Aufl. $\times 26 - 8 \times 16 - 4 = \times 42 - 12 = \times 30$
 $- 32 \times 12 - 38 \times 8 = - 70 \times 20 = - 50$

2.) Zahlen mit einerley, oder verschiedenen Zeichen von einander zu *subtrahiren*.

Aufl. Von $\times A$ abgezogen $\times B = A - B$

Von $\times A$ abgezogen $- B = A \times B$

denn $\times B \times (A - B) = A$

$- B \times (A \times B) = A$

Zufatz. Eine Gröſſe wird *addirt*, wenn man ſie mit ihrem Zeichen *hinzusetzt*; *subtrahirt*, wenn man ſie mit dem entgegengesetzten Zeichen *hinzusetzt*.

§. 25.

Lehrsatz. Bey der *Multiplication* ſowohl, als bey der *Division*, bringen einerley Zeichen was *Bejahendes*, verschiedene Zeichen aber was *Verneinendes* hervor; in ſo fern nämlich die Einheit überall bejahend angenommen wird.

Beweis. 1.) Für die *Multiplication*. So wie die bejahende Einheit in dem einen bejahenden Faktor ſteckt; ſo ſteckt auch die zweyte

a) bejahende Faktor in dem bejahenden Produkte;

b) verneinende Faktor, in dem verneinenden Produkte.

Und ſo, wie das Entgegengesetzte der bejahenden Einheit in dem einen verneinenden Faktor ſteckt; ſo ſteckt auch das Entgegengesetzte des zweyten

a)

a) bejahenden Faktors in dem verneinenden,

b) verneinenden Faktors in dem bejahenden Produkte.

Beweis für die Division. So wie der bejahende Divisor in dem bejahenden Dividendus; oder der verneinende Divisor in dem verneinenden Dividendus steckt; so steckt auch die bejahende Einheit in dem bejahenden Quotienten.

Und so, wie das Entgegengesetzte des verneinenden Divisor in dem bejahenden Dividendus, oder des bejahenden Divisors, in dem verneinenden Dividendus steckt; so steckt auch das Entgegengesetzte der bejahenden Einheit in dem verneinenden Quotienten.

Aufgabe. 1.) Zahlen mit einerley, oder verschiedenen Zeichen, miteinander zu multipliciren.

Aufl. $9 - 4 - 8 \times 7 = 4$

$$\times 7 - 4 = \times 3$$

$$- 36 \times 16 \times 32 - 28$$

$$\times 63 - 28 - 56 \times 49$$

$$\times 27 - 12 - 24 \times 21 = 12$$

2.) Zahlen mit einerley, oder verschiedenen Zeichen miteinander zu dividiren.

Aufl. $\frac{56 - 35}{7} = 8 - 5 = 3$

Anmerkung. Das Weitere von der Rechnung mit entgegengesetzten Gröſſen, findet man im Folgenden.

7. Die Rechnung mit Buchstaben.

§. 26.

Wahlsatz. Die Buchstaben des Alphabets werden als allgemeine Zeichen unbestimmter Gröſſen gebraucht, und zwar die erstern für bekannte, und gegebene, die letztern für unbekannte, und gesuchte Gröſſen. Für die Rechnungsarten dienen die gewöhnlichen arithmetischen Zeichen; nur daß man bey den Produkten auch das Zeichen beliebig wegläßt, und die Buchstaben bloß neben einander setzt.

Zusatz. 1.) $a + b$ heißt die Summe der beyden Zahlen a , und b ; $a - b$ ihre Differenz; $a \cdot b$, oder $a \times b$, oder $a b$ ihr Produkt; $a : b$, oder $\frac{a}{b}$ ihr Quotient.

2.) $3 a = a + a + a$, das 3fache der Gröſſe a ; oder allgemein $n a$ das n fache derselben; a mag nun eine Zahl, oder eine bestimmte Einheit, oder was man will, bedeuten.

3.) $a^3 = a \cdot a \cdot a$, die 3te Potenz der Zahl a , oder allgemein a^n die n te Potenz der Gröſſe a ; und a^0 das

Beyn guten Schiffsdecken gehen 16 Lott
 Kupfer 3 Lott Rohr 2 So Schiffe
 wie viel von jeder Art gehören 100 L

$$A = 100 \text{ fl} \quad \begin{matrix} x+y+z \\ 16 \quad 3 \quad 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y+z \\ 16 \quad 3 \quad 2 \end{pmatrix} = 21$$

$$21 : 100 \text{ fl} = 16 : x$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 16 \\ \hline 6250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 21 \\ \hline 47619 \\ 100 \\ 21 \\ \hline 12600 \end{array}$$

78 4 1/2 Pfund Kupfer

$$21 : 100 \text{ fl} = 3 : y$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 3 \\ \hline 3000 \\ 21 \\ \hline 21 \\ -93 \\ 21 \\ \hline 84 \\ -6 \end{array}$$

$$21 : 100 \text{ fl} = 2 : y$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ 21 \\ \hline 189 \\ -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \frac{4}{21} \\ 14 \frac{8}{21} \\ 9 \frac{11}{21} \\ \hline 100 \frac{24}{21} \end{array}$$

das m -fache dieser Potenz. Das, was in eine solche Potenz multiplicirt ist, wie m , heist ihr *Coefficient*.

4.) $\sqrt[n]{a}$, die Cubikwurzel aus a ; oder allgemein $\sqrt[n]{a}$, die n -te Wurzel aus a ; und $m\sqrt[n]{a}$, das m -fache dieser Wurzel.

5.) $5a \times 3a = (5 \times 3)a = 8a$; und $5a - 3a = (5 - 3)a = 2a$; oder allgemein $m \times n x = (m \times n)x$.

6.) $p x^n \div q x^n = (p \div q) x^n$; und

$$p\sqrt[n]{x} \div q\sqrt[n]{x} = (p \div q)\sqrt[n]{x}.$$

$$7.) \frac{8ab}{4ac} = \frac{2b}{c}; \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

§. 27.

Aufgabe. Potenzen von einerley Wurzel mit einander zu multipliciren.

Auflös. $a^3 \cdot a^2 = a a a \cdot a a = a^5 = a^{3+2}$

Also mache man von solcher Wurzel eine Potenz, deren Exponent die Summe der Exponenten der Faktoren ist.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Zusatz. 1.) $(a^3)^2 = a^6$. allgemein $(x^n)^m = x^{nm}$.

2.) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; allgemein $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

3.) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$. allgemein $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$.

4.) $(ab)^m = a^m b^m$; und $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

5.) $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \left(a^{\frac{1}{m}} \times b^{\frac{1}{m}}\right)^m = ab$

6.) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \left(\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}\right)^m = \frac{a}{b}$

§. 28.

Aufgabe. Potenzen von einerley Wurzel miteinander zu dividiren.

Auflös. $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaaa = a^4 = a^{5-2}$.

Also mache man von solcher Wurzel eine Potenz, deren Exponent die Differenz der gegebenen Exponenten ist, so dass nämlich vom Exponenten des Dividendus, der Exponent des Divisors abgezogen werde. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Zu-

Zusatz I. Soll eine Potenz zu einer andern. erhoben werden, so wird die Potenz in die eine, zu der sie soll erhoben werden, multipliciert. Z. B. Die kubik Potz soll erhoben werden zum Quadrat.
Z. B. $(a^3)^2 = a^6$. $(x^n)^m = x^{nm}$.

Zusatz II. Ist eine Wurzel gegeben, und soll nur aufgehoben werden, so setzt man selbe mit der Potenz als Bruch an. Z. B.

$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$. allgemein $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.
Die Potenzen sind nehmlich allzeit als Zähler des Bruchs, und die Wurzel als Nenner angesetzt.

Zusatz III. Sollte man die Wurzel aus einer ^{gewissen} Potz finden, so setzt man das Wurzelzeichen an, und der Nenner des vorigen Bruchs bekommt die Stelle ober der Wurzelzeichen, und der Zähler trägt die Potz an. Z. B.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}.$$

Zusatz IV. Wird ein Produkt in $()$ eingefasst, und ober dieser die Potz angegeben, so löst diese Potz, wenn das Produkt aufgelöst wird nicht nur einem, oder der andern Zahl, sondern einer jeden zu. Z. B.

$$(ab)^n = a^n b^n \quad | \quad (23)^3 = 2^3 3^3;$$

Zusatz V. Ihm ist das nehmliche zu beobachten was in I. W. gesagt ward, nur das zu jedem Buchstaben die Wurzel muß geschrieben werden. Z. B.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[2]{23} = \sqrt[2]{2} \times \sqrt[2]{3}.$$

Zusatz VI. Auch bei der Division ist es das nehmliche. Die erste Wurzel die bestimmt ist, muß bei der Division gegen einzelnen Buchstaben beigefügt seyn. Z. B.

$$\sqrt[n]{ab} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad \sqrt[3]{36} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}}$$

§ 28.

Aufgabe. Werden Potenzen von einerley Wurzel mit einander dividirt, so werden nur ihre Exponenten von einander subtrahirt, oder man löst 2. d. die Potenzen auf, und subtrahirt dann. Z. B.

$$\frac{a^8}{a^3} = \frac{aaaaaaaa}{aaa} = aaaaa = a^5 = a^{8-3}$$

allgemein $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

44
 Zusatz I. Sind Wurzeln und Exponenten gleich, so ist in der Division die ganze
 Größe nicht mehr als die Einheit. Von jeder Größe ist in sich nur
 einmal enthalten, die Exponenten werden aber von einander abge-
 zogen, d. h. sie werden mit veränderten Zeichen addiert, und weil
 sie gleich sind, heben sie einander auf, also ist es von jeder
 Größe, Quadratwurzeln und Exponenten in der Division gleich sind
 der Exponent 0. Da aber ist gleich der Einheit, also ist jede der ge-
 nannten Größen gleich der Einheit.

Beweis. $\frac{x^n}{x^m} = 1$
 Nun aber ist $1 = x^0$, das $\frac{x^n}{x^m} = 1$ d. h. jede Größe ist in sich nur einmal ent-
 halten, die Exponenten aber werden von einander subtrahiert $\frac{x^n}{x^m} = 1 = x^{n-m}$
 Wenn ich also gleiches ~~von~~ ^{an} gleiches abziehe, so bleibt mir nichts, also
 ist $\frac{x^n}{x^m} = 1 = x^{n-m} = x^0$

Zusatz II. Sollten zwei Größen, deren Exponenten ungleich, und bei denen der
 Exponent der einen größer ist, als der des andern, so dividirt man
 den, dessen Exponent größer ist, mit dem kleineren, so viel abgezogen, als die Differenz
 beträgt, und dann es ein Buch geschrieben I. B.

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$$

Zusatz III.

Zusatz. 1. $\frac{x^m}{x^m} = 1 = x^{m-m} = x^0.$

2.) $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4} = a^{3-7} = a^{-4}.$ Allgemein $\frac{a^{2m}}{a^{3m}} = a^{-m}$

3.) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};$ allgemein $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

4.) a) $x^m \cdot x^{-n} = x^{m-n};$ und $x^{-m} \cdot x^{-n} = x^{-(m+n)}$

b) $(x^{-m})^n = x^{-mn};$ und $(x^m)^{-n} = x^{-mn}$

c) $\frac{x^m}{x^{-n}} = x^{m+n};$ und $\frac{x^{-m}}{x^{-n}} = x^{n-m};$ und $\frac{x^{-m}}{x^n} =$

$= x^{-(m+n)}$

5.) a.) $x^r \cdot x^{\frac{m}{n}} = x^{r+\frac{m}{n}};$ und $x^r : x^{\frac{m}{n}} = x^{r-\frac{m}{n}}$

b.) $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}}.$ u. f. w.

§. 29.

Erklärung. 1.) Eine Grösse, welche aus mehreren, durch $+$ und $-$ verbundenen Theilen besteht, heisst *vieltheilig*, *polynomisch*; jede andere aber *einfach*, *mononomisch*. Die einzelnen Theile einer vieltheiligen Grösse, heissen ihre *Glieder*, oder *Namen*, und die Grösse selbst wird nach der Zahl der Glieder, *zweythelig*, *dreytheilig*, u. f. w. *binomisch*, *trinomisch* &c. genannt.

An-

Anmerk. Wird eine *vieltheilige Gröſſe* mit einer andern Gröſſe durch die *arithmetiſchen Zeichen verbunden* : ſo ſchließt man ſie gewöhnlich in eine *Parentheſe* ein. Einige ſetzen einen *Strich* über die Gröſſen.

2.) Eine *vieltheilige Gröſſe*, welche *verſchiedene Potenzen* von *einerley Buchſtaben* enthält, wird nach ſolchem Buchſtaben *geordnet*, wenn man ihre *Glieder* ſo aufeinander folgen läßt, wie die *Exponenten der Potenzen* zu, oder abnehmen.

§. 30.

Aufgabe. 1.) Vieltheilige Gröſſen zu *addiren*, oder zu *ſubtrahiren*.

$$\begin{array}{r} \text{Auſt. } 15a - 17b + 4c - 7d + 5e \\ 6a - 19b - 7c + 3d - 9f \end{array}$$

$$\text{Summe. } 21a - 36b - 3c - 4d + 5e - 9f$$

$$\text{Differenz. } 9a + 2b + 11c - 10d + 5e + 9f.$$

$$\text{Zuſatz. 1.) Iſt } x > y \text{ ſo iſt } x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2}$$

$$\text{und } y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2}$$

$$2.) 2m + (2n + 1) = 2m + 2n + 1; \text{ und}$$

$$2m + 1 + (2n + 1) = 2m + 2n + 2$$

3.)

§ 30.

Soll man Größen, die vieltheilig sind, zu einander addieren, oder subtrahieren, so verfährt man, wie bei der Addition, und Subtraction zu sehen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 13a - 11b + 12c - 28f \\ 6a + 17b + 10c + 20f \\ \hline \text{Summe.} + 19a - 3b + 22c - 48f \\ \text{Differenz.} 7a - 3b + 2c - 8f. \end{array}$$

Zusatz I Sind zwei ungleiche Größen gegeben,

Zusatz II. Sind die Zahlen die addirt, oder subtrahirt werden sollen gleiche, gerade, so ist auch das Produkt eine gerade Zahl. Z. B.

$$16 + 12 + 4 = 28$$

Sind sie aber ungerade, so ist das Produkt eine ungerade Zahl. Z. B. $16 + 13 + 8 = 37$.

Da die ungerade Zahl ist entweder um die Einheit kleiner, oder größer als die Gerade.

Satz III. Sind zwei ungerade Zahlen da, so ist ihr Produkt auch eine gerade Zahl. Z.B.: $6+1+4+1=12$.

§ 31.

Man rechnet wie gewöhnlich, wenn man Zahlen vielhailige GröÙ multipliciert. Z.B.:

$$4ca - 3fx + 5k$$

$$- 6ca$$

$$- 24c^2a^2 + 18fxca - 30kca.$$

Wir werden also die Coefficienten multipliciert, und die GröÙen beibehalten.

Wieder, weil sie keinen ändern Coefficienten, als die Einheit haben.

Man darf nehmen nicht nur einen Theil des gegebenen Produkts, sondern alle Theile mit dem andern Factor multiplicieren; eben so, wenn mehrere factoren, multiplicatoren, da sind, so muß nicht nur der ganze Multiplicand mit einem andern mit allen Multiplicatoribus multipliciert werden; da

$$7ab - 9cx - 4mn + 3fk$$

$$+ 6cx + 8af$$

$$+ 42abcx - 54c^2x^2 - 24cxmn + 18afkx.$$

$$+ 56abaf - 72cxaf - 32afmn + 24afkx$$

$$+ 56abaf - 72cxaf - 32afmn + 24afkx + 42abcx - 54c^2x^2 - 24cxmn + 18afkx.$$

Satz I. Wird ein Produkt von ihrer Differenz multipliciert, so gibt es die Differenz ihrer Quadrate. Z.B.:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

Beweis. $6+4=10$. $6-4=2$.

$10=20^2$ ist also das Quadrat von 10, und $2 \times 2 = 4$ ist das Quadrat von 2.

$$(a+b) \times (a-b).$$

$$\begin{array}{r} ab \\ a+b \\ a-b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 \\ ab \\ ab \\ b^2 \\ \hline \end{array}$$

Ungerade Zahlen, miteinander multipliciert, geben ein ungerade Produkt! Z.B.

$$3 \times 3 = 9.$$

$$7 \times 5 = 35.$$

Wird eine Gerade

mit einer Geraden multipliciert, so ist das Produkt auch gerade. $2 \times 2 = 4$.

Eine ungerade mit einer geraden multipliciert, giebt ein ungerade Produkt. $3 \times 2 = 6$. Also an die die alle ungerade Zahlen, da

$$Z.B. 3 \times 5 = 15.$$

$$3.) \quad 2m - (2n - 1) = 2m - 2n - 1; \text{ und}$$

$$(2m - 1) - (2n - 1) = 2m - 2n.$$

§. 31

Aufgabe. 2.) Vieltheilige Gröſſen zu multipliciren.

$$\text{Aufl. 1.)} \quad 4d - cx - 2$$

$$- 4cx$$

$$- 16cdx - 4c^2x^2 - 8cx$$

$$2.) \quad 3x^2 - 4ax - a^2$$

$$3x^2 - ac$$

$$- 3acx^2 - 4a^2cx - a^3c$$

$$- 9x^4 - 12ax^3 - 3a^2x^2$$

$$9x^4 - 12ax^3 - 3a^2x^2 - 3acx^2 - 4a^2cx - a^3c$$

$$\text{Zusatz. 1.)} \quad (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

$$2.) \quad 2n \cdot 2m = 4nm; \text{ und } (2n - 1) \cdot 2m = 4nm - 2m$$

$$3.) \quad (2n - 1) \cdot (2m - 1) = 4nm - 2m - 2n + 1.$$

$$4.) \quad 2n - 1, \text{ oder } 2(n - 1) - 1 \text{ ist die } (n - 1) \text{ te ungerade Zahl.}$$

$$5.) \quad \text{Für ächte Brüche ist } \frac{a}{a-d} - \frac{a}{a-b} =$$

E

a

$$\frac{aa + ad - aa - ad}{(a + d) \cdot (a - d)} = \frac{ad - ad}{(a + d) \cdot (a - d)}$$

b.) Für unächte Brüche ist $\frac{a + d}{a} - \frac{a + b}{a} =$

$$\frac{aa + ad - aa - ab}{aa} = \frac{ad - ab}{aa}$$

§. 32.

Aufgabe. 3.) Vieltheilige Gröfsen zu dividiren.

Aufl. 1.) $(4c^2x^2 - 16cdx - 8cx) : (-4cx) = -cx + 4d + 2$

$$: -4cx$$

$$+ 4c^2x^2$$

$$- 16cdx - 8cx$$

$$(-4cx)$$

$$- 16cdx$$

$$(-4cx)$$

$$- 8cx$$

Aufl.

§ 32.

Sollen vieltheilige Größen dividirt werden, so verfährt man wie folgt:
 Man dividirt die Coefficienten, und die Wurzeln wenn sie gleich sind
 oder nicht; dann wird mit Quotienten, der aus dieser Division entstanden ist, nach
 den die Potenzen von einerley Wurzeln von einander subtrahirt worden sind
 in den Divisor multiplicirt, und dem erst den erste Multiplicandus des Divi-
 dends, das aus dieser Multiplication entstanden ist, addirt, und was sich gleich
 aufgehoben. I: B:

$$\begin{array}{r}
 +4c^2x^2 - 16cdx - 8cx \quad \Bigg| \quad 8c^2x^2 - 24cdx + 32fx \\
 -4cx \\
 \hline
 \pm 4c^2x^2 \\
 \hline
 000 - 16cdx : 4cx \\
 \quad 4cx \\
 \quad + 16cdx \\
 \hline
 0000 - 8cx \\
 \quad (-4cx) \\
 \quad \quad + 8cx \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

$$\frac{8c^2x^2 - 24cdx + 32fx}{+8cx} = cx - 3d + 4f$$

$$\begin{array}{r}
 +8c^2x^2 \\
 (+8cx) \\
 +8c^2x^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -24cdx \\
 (+8cx) \\
 \hline
 24cdx \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +32fx \\
 (+8cx) \\
 \hline
 32fx \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Auf II. Sind aber im Divisor mehrere Glieder, so wird nur ^{nur} ein ^{ein} Glied dividirt, mit allen übrigen, die den ganzen Divisor ausmachen, kann das oft multiplicirt, und zuletzt das mit veränderte Zeilen ~~beachtet~~.

Z. B.

$$\begin{array}{r}
 9x^4 + 12ax^3 - 4a^2x^2 - a^3 = +3x^2 + a^2 + 4ax \\
 \underline{3x^2 - a^2} \\
 +9x^2 - 2a^2x \\
 \underline{+3a^2x^2 + 12ax^3 + 4a^2x^2 + 8a^3} \\
 (3x^2 - a^2) \\
 \underline{+3a^2x^2 + a^3} \\
 0 \quad 2 + 12ax^3 - 4a^2x \\
 \underline{(3x^2 - a^2)} \\
 12ax^3 - 4a^2x \\
 \underline{12ax^3} \\
 0
 \end{array}$$

Zusatz I. Ist der Divisor kein Factor des Dividends, so erhält der Quotient die Form eines Bruchs: auch kann man ihn durch eine Reihe von Brüchen ohne Ende dargestellt werden. Z. B.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{(1-x)} = +1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \frac{x^6}{1-x} \\
 \underline{+ \frac{1-x}{1-x}} \\
 \frac{1-x}{1-x} \\
 \underline{+ x - x} \\
 0 \quad x^2 \\
 1-x^2 \\
 \underline{+ x^2 - x^2} \\
 0 \quad + x^3 \\
 1-x^3 \\
 \underline{+ x^3 - x^3} \\
 0 \quad x^4
 \end{array}$$

Zusatz I. Eine solche Reihe lässt sich ohne Division so lange vortsetzen, als es uns beliebig ist. Dieses beyde Regeln sind aber zu beobachten.

a) Sind die Theile des Divisors verschieden, d. h. sind sie theils positiv, ~~negativ~~, so verwechseln sich die Zeichen des Quotienten, theils negativ, dann wieder negativ, welches das herkommt, dass die Zeichen verwechselt, und also addirt werden. Z. B.:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \\ \frac{1}{1+x} \\ \underline{1+x} \\ 0-x \\ \underline{1+x} \\ -x+x^2 \\ \underline{+x} \\ 0-x^2 \\ \underline{1+x} \\ -x^2+x^3 \\ \underline{+x^2} \\ 0-x^3 \\ \underline{1+x} \\ -x^3+x^4 \\ \underline{+x^3} \\ 0-x^4 \\ \dots \end{array}$$

Diese Regel ist zu merken, dass der Rest der vorhergehenden Division der Quotient der folgenden werden, wie man aus oben angeführten Beispiel sieht.

Zusatz II. Dies ist also eine klumpregel, dass, wo der Divisor ~~1+x~~ ^{1-x} ist, alle Quotienten das Zeichen des positiven bekommen; der bey der Division werden die Zeichen geändert nach der Multiplication, und so also addirt. Z. B.:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^6 + x^7 \\ \frac{1}{1-x} \\ \underline{1-x} \\ +x-x \\ \underline{+x} \\ -1-x \\ \underline{+x} \\ -1-x \\ \underline{+x} \\ -1-x \\ \dots \end{array}$$

Und so kan man fortnehmen, so lang man will; und wos man auch aufhören, und einen Bruch aufschreiben, wie oben.

Zusatz IV. hat aber der Divisor ein positives Zeichen, 1+x, so wechseln bey Quotienten die Zeichen ab, bald positiv, bald negativ. Z. B.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \\ \frac{1}{1+x} \\ \underline{1+x} \\ -x \\ \underline{1+x} \\ -x+x^2 \\ \underline{+x} \\ -x^2+x^3 \\ \underline{+x^2} \\ -x^3+x^4 \\ \underline{+x^3} \\ -x^4+x^5 \\ \dots \end{array}$$

Siehe ist zu merken

a) Ist die Grösse mit der ich anhöre, ein positives Zahlen, so muss der Bruch ein negatives bekommen. Z. B:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \dots + x^6 - \frac{x^7}{1+x}$$

b) Ist sie aber ein negatives Zahlen, so bekommt der Bruch ein positives. Z. B:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots + x^5 + \frac{x^6}{1-x}$$

Satz V. Nehmen wir die Zahl x sey so gross als 1, so ist das nehmen leicht zu beobachten, was mir vorgehenden § gesagt ward. Z. B.

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots + 1 - \frac{1}{2}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots - 1 + \frac{1}{2}$$

Satz VI. Setzen wir anstatt x den Bruch $\frac{a}{b}$, so versteht man, wie schon gesagt, nur dass man allezeit anstatt den Bruch setzt. Z. B.

$$\frac{x}{1-\frac{a}{b}} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^4}{b^4}$$

$$\begin{array}{r} + x - \frac{a}{b} \\ \hline + \frac{a}{b} \\ \hline 1 - \frac{a}{b} \\ \hline + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \\ \hline + \frac{a^2}{b^2} \\ \hline 1 - \frac{a}{b} \\ \hline + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \\ \hline + \frac{a^3}{b^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Bruch } \frac{x}{1-\frac{a}{b}} = 1 - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^4}{b^4} \\ + 1 + \frac{a}{b} \\ \hline + x + \frac{a}{b} \\ \hline + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \\ \hline + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \\ \hline + \frac{a^3}{b^3} - \frac{a^3}{b^3} \\ \hline + \frac{a^4}{b^4} \text{ und so fort.} \end{array}$$

Satz VII. Ist in dem § Satz b) > als a: so nehmen die folgenden Glieder in ersten Quotienten immer zu ab, und im zweyten ab; ist aber b < a: so nehmen sie immer zu, und im zweyten ab.

Aufl. 2.) $9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = 3x^2 + 4ax + a^2 \\ (3x^2 - a^2) \end{array} \right.$

$$+ 9x^4 - 3a^2x^2$$

$$- \quad +$$

$$0 + 12ax^3 + 3a^2x^2 - 4a^3x - a^4$$

$$(3x^2 - a^2)$$

$$12ax^3 \quad - 4a^3x$$

$$- \quad +$$

$$0 + 3a^2x^2 \quad 0 - a^4$$

$$(3x^2 - a^2)$$

$$+ 3a^2x^2 \quad - a^4$$

$$- \quad +$$

$$0$$

Zusatz. 1.) Ist der *Divisor* kein Faktor des *Dividendus*, so erhält der *Quotient* die Form eines Bruchs; oder kann durch eine Reihe von Brüchen ohne Ende dargestellt werden, nach den Regeln der Division: Z. B.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$(1-x)$$

$$+ 1 - x$$

$$- \quad +$$

$$+ x$$

$$E 2$$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$+$$

$$\begin{array}{r} \times X \\ (1 - X) \end{array}$$

$$\times X - X^2$$

$$\times$$

$$\times X^2$$

$$\times (1 - X)$$

$$\times X^2 - X^3$$

$$\times$$

$$\times X^3$$

Zusatz, 2.) Diese Reihe lässt sich leicht *ohne weitere Division* fortsetzen; denn man sieht, dass der *Quotient* alle *Potenzen von x* nach der Reihe ohne Ende enthalten werde, und zwar so: dass

a) wenn irgend ein *Rest positiv* ist, und eine *Potenz von x* enthält, deren *Exponent* die *Zahl des Restes* ist, — solcher *Rest* auch diese *Potenz x* für das *Glied des Quotienten* gebe, dessen *Zahl* eins mehr, als die *Zahl des Restes* ist,

b) der *nächstfolgende Rest* von eben der *Beschaffenheit* sey.

3.) Eigentlich ist also:

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^m + \frac{X^{m+1}}{1-X} ;$$

$$4.) \frac{1}{1-X} = 1 - X + X^2 - X^3 + \dots \dots \dots \text{Hier sind eben}$$

eben die *Gesetze der Reste*, und der *Glieder des Quotienten*, wie im *Zuf. 2.* nur dass hier die *Zeichen in beyden abwechseln*. Der *Quotient* ist also hier vollständig dadurch ausgedrückt:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1 - x}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1 - x}$$

5.) Man setze $x = 1$ so findet man

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \frac{1}{2}$$

oder

$$1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \frac{1}{2}$$

6.) Hätte der Bruch diese Form,

$$\frac{b}{a}$$

so ergibt sich der *Quotient*, wenn man $\frac{b}{a}$ anstatt x setzt.

7.) Ist im *Zuf. 6.* $a > b$: so nehmen die folgenden Glieder in dem ersten *Quotienten* immer ab, und in dem zweyten immer zu; Ist aber $a < b$: so nehmen sie in dem ersten zu, und in dem zweyten ab.

Erklärung. Eine *Reihe*, *Series*, heisst eine Menge von Grössen, Gliedern, oder *Theilen*, deren jede nach einem gewissen, allen gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt wird. Der Ausdruck, welcher dieses gemeinschaftliche Gesetz darstellt, heisst ein *allgemeines Glied*, *Terminus Generalis*.

- Zusatz.* 1.) Aus dem allgemeinen Gliede lässt sich die *Reihe ohne Ende*, *Series indefinita*, so weit es verlangt wird, bestimmen.
- 2.) Die Glieder der Reihe nehmen entweder zu, oder ab; und geben hierdurch entweder eine *steigende Reihe*, *adscendens*; oder *fallende*, *descendens*.
- 3.) Rechnet man alle Glieder einer Reihe, oder nur eine gewisse Menge von Gliedern zusammen: so heisst das, was heraus kömmt, die *Summe* der Reihe, oder der berechneten Glieder. Die *Ergänzung* der Reihe, *Supplementum*, heisst, was zur Summe der ersten Glieder kommen muss, um die Summe der ganzen Reihe zu machen.
- 4.) Bey einer fallenden Reihe wird die *Ergänzung* desto kleiner, je mehrere erste Glieder man summirt; oder dem sämmtlichen Werthe der Reihe immer näher, und näher kömmt. Dieser Werth heisst die *Grän-*

Grenze der Reihe; und die Reihe heisst *nähernd*, *convergens*. Eine steigende Reihe, als bey welcher das Gegentheil statt findet, heisst *entfernend*; *divergens*.

5.) Eine Reihe nähert, oder entfernt sich desto *schneller*, je gröfser der Unterschied ihrer Glieder ist.

6.) Nähert sich eine Reihe sehr schnell; so sind wenige ihrer ersten Glieder schon hinreichend, den gesammten Werth bis auf eine Kleinigkeit darzustellen.

8. Die Rechnung mit Decimal- und Sexagesimal-Brüchen.

§. 34.

Erklärung. Ein *Decimalbruch* — zehntheiliger Bruch, heisst, dessen *Nenner eine Potenz der Zahl zehn ist*.

Zusatz. 1.) $\frac{1}{10} = 1 \cdot 10^{-1}$; $\frac{1}{100} = 1 \cdot 10^{-2}$;

$$\frac{1}{1000} = 1 \cdot 10^{-3};$$

2.) Unterscheidet man die Stellen der *Einer*, durch ein *Comma*; so kann man die *Nenner* weglassen, und die *Ziffern* für die *Decimalbrüche* den *Einern* zur Rechten in eben der Ordnung folgen lassen; wie die ganzen

zen Decimalzahlen den Einern zur linken folgen.
Sind keine ganze Zahlen vorhanden, so setzt man
ein Null vor das Comma.

$$3.) 5674,763 \cdot 10^2 = 567476,3 \text{ und}$$

$$5674,763 : 10^2 = 56,74763.$$

$$4.) 0,763 = \frac{763}{1000}; \text{ und } 5,763 = \frac{5763}{1000}$$

$$5.) 38,456 = \frac{38456}{1000} = 38456 \cdot 10^{-3}$$

$$6.) \frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5; \quad \frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0,75;$$

$$\frac{73}{8} = \frac{73,000}{8} = 9,125;$$

$$\text{aber } \frac{1}{3} = 0,333\ldots \text{ und } \frac{17}{3} = 5,666\ldots$$

Daher läßt sich nicht jeder Bruch, oder Quotient
genau in Decimalbrüchen ausdrücken.

§. 35.

Aufgabe. Decimalbrüche zueinander zu addiren, oder voneinander zu
subtrahiren.

Auf-

<i>Auflös.</i>	754,306		8 $\overline{+}$ 5,0864 . d. i. 8,0000
	0,898		5,0864
<i>Summe</i>	755,204	<i>Summe</i>	13,0864
<i>Differenz</i>	753,408	<i>Differenz</i>	2,9136.

2.) *Decimalbrüche miteinander zu multipliciren.*

$$\text{Aufl. } \begin{array}{r} 35,7863 \\ 2,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1789315 \\ 715726 \\ 715726 \\ \hline 80,519175 \end{array}$$

$$715726$$

$$715726$$

$$80,519175$$

$$\text{Denn } 35,7863 = 357863 \cdot 10^{-4}$$

$$2,25 = 225 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Folglich das Produkt} = 357863 \cdot 225 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} =$$

$$80519175 \cdot 10^{-6} = 80,519175.$$

3.) *Decimalbrüche miteinander zu dividiren.*

$$\text{Aufl. } 0,03264 \mid 0,136 \quad 326,4 \mid 13600$$

$$(0,24)$$

$$(0,024)$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline -86 \\ 24 \\ \hline 72 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$-86$$

$$24$$

$$72$$

$$144$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline -86 \\ 24 \\ \hline 72 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$-86$$

$$24$$

$$72$$

$$144$$

$$\begin{array}{r}
 144 \\
 24 \\
 \hline
 144 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 144 \\
 24 \\
 \hline
 144 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Denn im ersten Exempel ist

$$\frac{3264 \cdot 10^{-5}}{24 \cdot 10^{-2}} = \frac{3264}{24} \cdot 10^{-3} = 136 \cdot 10^{-3} = 0,136.$$

Im zweyten Exempel ist

$$\frac{3264 \cdot 10^{-1}}{24 \cdot 10^{-3}} = \frac{3264}{24} \cdot 10^{+2} = 136 \cdot 10^{+2} = 13600$$

Anmerk. Die Beweise für die Multiplication, und Division mit Decimalbrüchen werden auch *allgemein* geführt.

§. 36. Folglich das Produkt = $3.264 \cdot 10^{-5} = 0,0003264$

Erklärung. Eine Zahl, die man als ein *Produkt* derselben in eine *Potenz der Zahl 60* ansiehet, ist eine *Sexagesimalzahl*; und insbesondere ein *Sexagesimalbruch*, wenn der *Exponent* einer solchen Potenz *negativ* ist.

Zusatz. Von dieser Art ist die Eintheilung der *Grade* des *Kreises* (so wie auch der *Stunden*) in *Minuten*, *Secunden*, *Tertien* u. f. f. welches man durch *°*, *'*, *'''* u. f. f. anzeigt. Die *Rechnungsarten* sind wie die mit benannten *Zah-*

Zahlen, wobey man auch, wenn die gefundene Zahl Einheiten einer höhern Klasse in sich faßt, solche durch die Division mit der Zahl 60 reduciren muß.

Anmerk. Ueberhaupt heist eine *allgemeine Form*, unter welche jede auch noch so verschiedene Zahlenreihe gebracht werden kann, eine *allgemeine Zahlenreihe*; und diese entsteht, indem man eine unbestimmte Grösse x nach der Ordnung, wie die positiven und negativen Exponenten von Null an zu beyden Seiten aufeinander folgen; in ihre verschiedenen Potenzen erhebt, und solche mit unbestimmten einfachen Grössen a, b, c , u. f. w. multiplicirt. Z. B.

$$h x^{+n} \dots d x^{+3}, c x^{+2}, b x^{+1}, a x^0, b x^{-1}, c x^{-2}, d x^{-3} \dots$$

Giebt man in solcher allgemeinen Zahlreihe der gemeinschaftlichen Grösse x einen bestimmten Werth: so entsteht daraus, je nachdem dieser Werth verschieden ist, auch ein verschiedenes Zahlensystem; und solcher Werth der gemeinschaftlichen Grösse x heist alsdenn die Basis dieses Systems.

$$10,0 = (1,0) \cdot (1,0) = 1,0 = \left(\frac{1}{10}\right)$$

$$100,0 = (1,0) \cdot (10,0) = 1,0 = \left(\frac{1}{100}\right)$$

Der

Der zweyte Abschnitt.

Von den Potenzen, und Wurzeln der Zahlen.

I. Grundlehren von den Potenzen.

§. 37.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl auf ihre Potenzen zu erheben.

Aufl. $7 = 7^1$; $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$; $7 \cdot 7^2 = 7^3 = 343$;

$7 \cdot 7^3 = 7^4 = 2401$.

Zusatz. 1.) Umgekehrt ist $7 = \sqrt[3]{49}$; $\sqrt[3]{343} = 7 = \sqrt[4]{2401}$.

2.) $3^5 = 3^5$; $a^n = a^n$; $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{49}$; $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a}$;

3.) $400^3 = 64000000$; oder *allgemein* $(a \cdot 10^n)^m = a^m \cdot 10^{nm}$.

4.) $\left(\frac{4}{-}\right)^2 = \frac{4}{-} \cdot \frac{4}{-} = \frac{4 \cdot 4}{-} = \frac{4^2}{-} = \frac{16}{-}$; oder *allgemein*

$\left(\frac{5}{a}\right)^n = \frac{5}{a} \cdot \frac{5}{a} \cdot \frac{5}{a} \cdot \dots = \frac{5^n}{a^n}$

5.) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0, 1^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = 0, 01$

$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0, 1^3 = (0, 01) \cdot (0, 1) = 0, 001$

Ueberhaupt das *Quadrat* eines *Decimalbruchs* von der
Ordnung — n ist von der *Ordnung* — $2n$;

Sein *Würfel* von der *Ordnung* — $3n$; u. s. w.

6) $\sqrt[9]{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt[9]{9}}{\sqrt[9]{16}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{9}}$; allgemein $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

weil $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a^{\frac{n}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}} = \frac{a}{b}$.

§. 38.

Lehrsatz. Jede *Potenz* einer *ganzen Zahl* ist eine *ganze Zahl*; und
 jede *Potenz* eines *eigentlichen Bruchs* ist ein *eigentlicher*
Bruch. Denn

1.) Ist a eine *ganze Zahl*, so ist offenbar $a^n = a a a$
 $a \dots$ auch eine *ganze Zahl*.

2.) Ist $\frac{a}{b}$ ein *ächter Bruch*, wo $a < b$, folglich

$a^n < b^n$; so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ auch ein
ächter Bruch.

3.) Ist $\frac{a}{b}$ ein *unächter* aber *eigentlicher Bruch*, dessen

Zähler und Nenner Produkte aus ungleichen Primzahlen

finden sind, so daß $\frac{a}{b} = \frac{c \cdot d \cdot e \dots}{f \cdot g \cdot h \dots}$ ist: so

ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c^n \cdot d^n \cdot e^n \dots}{f^n \cdot g^n \cdot h^n \dots}$; folglich

ein Bruch, wo jeder einfache Faktor im Zähler und Nenner, bey der zweyten Potenz zweymal, bey der dritten dreymal, bey der n ten n mal vorkömmt, ohne daß jemals einige Faktoren des Nenners, vielweniger alle, in den Faktoren des Zählers aufgiengen.

Demnach wird $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ niemals eine ganze Zahl werden, sondern, weil $a^n > b^n$, immer ein unächter, aber eigentlicher Bruch bleiben.

Zusatz. Ist die Wurzel einer ganzen Zahl Größer, als eine ganze Zahl x , aber kleiner, als diese ganze mit Einheit vermehrt $(x + 1)$ so ist solche Wurzel weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch.

2.) Dergleichen Wurzeln heißen *Irrationalgrößen*, und haben weder die *Einheit*, noch irgend einen *Theil der Einheit* zum Maasse.

II. Die

II. Die Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 39.

Lehrsatz. 1.) Das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel enthält das Quadrat beyder Theile, und das doppelte Produkt aus beyden Theilen.

$$\text{Denn } (A + B) \cdot (A + B) = A + B$$

$$A^2 + A B$$

$$+ A B + B^2$$

$$= A^2 + 2 A B + B^2.$$

Zusatz. 1.) $(A - B)^2 = A^2 - 2 A B + B^2$

2.) $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4 A B.$

3.) Sind zwey Wurzeln um Eins unterschieden, wie, n und $n + 1$; so sind ihre Quadraten n^2 , und $n^2 + 2 n + 1$. Also ist ihr Unterschied $= 2 n + 1$, die $(n + 1)$ te ungerade Zahl.

4.) Jedes Quadrat ist die Summe so vieler aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, als seine Wurzel Einheiten hat. Alle Quadrate, nach der Reihe, ohne Multiplication zu finden, darf man daher nur die ungerade Zahlen nach der Reihe addiren; und wenn man zu einem Quadrate seine doppelte

pelte Wurzel und noch Eins addirt, so hat man das nächstfolgende.

$$1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9$$

$$2^2 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$3^2 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$4^2 = 9 + 6 + 1 = 16$$

$$5^2 = 16 + 8 + 1 = 25$$

$$6^2 = 25 + 10 + 1 = 36$$

$$7^2 = 36 + 12 + 1 = 49$$

$$8^2 = 49 + 14 + 1 = 64$$

$$9^2 = 64 + 16 + 1 = 81$$

$$10^2 = 81 + 18 + 1 = 100$$

$$11^2 = 100 + 20 + 1 = 121$$

$$12^2 = 121 + 22 + 1 = 144$$

$$13^2 = 144 + 24 + 1 = 169$$

$$14^2 = 169 + 26 + 1 = 196$$

$$15^2 = 196 + 28 + 1 = 225$$

$$16^2 = 225 + 30 + 1 = 256$$

$$17^2 = 256 + 32 + 1 = 289$$

$$18^2 = 289 + 34 + 1 = 324$$

$$19^2 = 324 + 36 + 1 = 361$$

$$20^2 = 361 + 38 + 1 = 400$$

$$21^2 = 400 + 40 + 1 = 441$$

$$22^2 = 441 + 42 + 1 = 484$$

$$23^2 = 484 + 44 + 1 = 529$$

$$24^2 = 529 + 46 + 1 = 576$$

$$25^2 = 576 + 48 + 1 = 625$$

$$26^2 = 625 + 50 + 1 = 676$$

$$27^2 = 676 + 52 + 1 = 729$$

$$28^2 = 729 + 54 + 1 = 784$$

$$29^2 = 784 + 56 + 1 = 841$$

$$30^2 = 841 + 58 + 1 = 900$$

$$31^2 = 900 + 60 + 1 = 961$$

$$32^2 = 961 + 62 + 1 = 1024$$

$$33^2 = 1024 + 64 + 1 = 1089$$

$$34^2 = 1089 + 66 + 1 = 1156$$

$$35^2 = 1156 + 68 + 1 = 1225$$

$$36^2 = 1225 + 70 + 1 = 1296$$

$$37^2 = 1296 + 72 + 1 = 1369$$

$$38^2 = 1369 + 74 + 1 = 1444$$

$$39^2 = 1444 + 76 + 1 = 1521$$

$$40^2 = 1521 + 78 + 1 = 1600$$

$$41^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$$

$$42^2 = 1681 + 82 + 1 = 1764$$

$$43^2 = 1764 + 84 + 1 = 1849$$

$$44^2 = 1849 + 86 + 1 = 1936$$

$$45^2 = 1936 + 88 + 1 = 2025$$

$$46^2 = 2025 + 90 + 1 = 2116$$

$$47^2 = 2116 + 92 + 1 = 2209$$

$$48^2 = 2209 + 94 + 1 = 2304$$

$$49^2 = 2304 + 96 + 1 = 2401$$

$$50^2 = 2401 + 98 + 1 = 2500$$

$$51^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$$

$$52^2 = 2601 + 102 + 1 = 2704$$

$$53^2 = 2704 + 104 + 1 = 2809$$

$$54^2 = 2809 + 106 + 1 = 2916$$

$$55^2 = 2916 + 108 + 1 = 3025$$

$$56^2 = 3025 + 110 + 1 = 3136$$

$$57^2 = 3136 + 112 + 1 = 3249$$

$$58^2 = 3249 + 114 + 1 = 3364$$

$$59^2 = 3364 + 116 + 1 = 3481$$

$$60^2 = 3481 + 118 + 1 = 3600$$

$$61^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$$

$$62^2 = 3721 + 122 + 1 = 3844$$

$$63^2 = 3844 + 124 + 1 = 3969$$

$$64^2 = 3969 + 126 + 1 = 4096$$

$$65^2 = 4096 + 128 + 1 = 4225$$

$$66^2 = 4225 + 130 + 1 = 4356$$

$$67^2 = 4356 + 132 + 1 = 4489$$

$$68^2 = 4489 + 134 + 1 = 4624$$

$$69^2 = 4624 + 136 + 1 = 4761$$

$$70^2 = 4761 + 138 + 1 = 4900$$

$$71^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$$

$$72^2 = 5041 + 142 + 1 = 5184$$

$$73^2 = 5184 + 144 + 1 = 5329$$

$$74^2 = 5329 + 146 + 1 = 5476$$

$$75^2 = 5476 + 148 + 1 = 5625$$

$$76^2 = 5625 + 150 + 1 = 5776$$

$$77^2 = 5776 + 152 + 1 = 5929$$

$$78^2 = 5929 + 154 + 1 = 6084$$

$$79^2 = 6084 + 156 + 1 = 6241$$

$$80^2 = 6241 + 158 + 1 = 6400$$

$$81^2 = 6400 + 160 + 1 = 6561$$

$$82^2 = 6561 + 162 + 1 = 6724$$

$$83^2 = 6724 + 164 + 1 = 6889$$

$$84^2 = 6889 + 166 + 1 = 7056$$

$$85^2 = 7056 + 168 + 1 = 7225$$

$$86^2 = 7225 + 170 + 1 = 7396$$

$$87^2 = 7396 + 172 + 1 = 7569$$

$$88^2 = 7569 + 174 + 1 = 7744$$

$$89^2 = 7744 + 176 + 1 = 7921$$

$$90^2 = 7921 + 178 + 1 = 8100$$

$$91^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281$$

$$92^2 = 8281 + 182 + 1 = 8464$$

$$93^2 = 8464 + 184 + 1 = 8649$$

$$94^2 = 8649 + 186 + 1 = 8836$$

$$95^2 = 8836 + 188 + 1 = 9025$$

$$96^2 = 9025 + 190 + 1 = 9216$$

$$97^2 = 9216 + 192 + 1 = 9409$$

$$98^2 = 9409 + 194 + 1 = 9604$$

$$99^2 = 9604 + 196 + 1 = 9801$$

$$100^2 = 9801 + 198 + 1 = 10000$$

$$101^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

$$102^2 = 10201 + 202 + 1 = 10404$$

$$103^2 = 10404 + 204 + 1 = 10609$$

$$104^2 = 10609 + 206 + 1 = 10816$$

$$105^2 = 10816 + 208 + 1 = 11025$$

$$106^2 = 11025 + 210 + 1 = 11236$$

$$107^2 = 11236 + 212 + 1 = 11449$$

$$108^2 = 11449 + 214 + 1 = 11664$$

$$109^2 = 11664 + 216 + 1 = 11881$$

$$110^2 = 11881 + 218 + 1 = 12100$$

$$111^2 = 12100 + 220 + 1 = 12321$$

$$112^2 = 12321 + 222 + 1 = 12544$$

$$113^2 = 12544 + 224 + 1 = 12769$$

$$114^2 = 12769 + 226 + 1 = 12996$$

$$115^2 = 12996 + 228 + 1 = 13225$$

$$116^2 = 13225 + 230 + 1 = 13456$$

$$117^2 = 13456 + 232 + 1 = 13689$$

$$118^2 = 13689 + 234 + 1 = 13924$$

$$119^2 = 13924 + 236 + 1 = 14161$$

$$120^2 = 14161 + 238 + 1 = 14400$$

$$121^2 = 14400 + 240 + 1 = 14641$$

$$122^2 = 14641 + 242 + 1 = 14884$$

$$123^2 = 14884 + 244 + 1 = 15129$$

$$124^2 = 15129 + 246 + 1 = 15376$$

$$125^2 = 15376 + 248 + 1 = 15625$$

$$126^2 = 15625 + 250 + 1 = 15876$$

$$127^2 = 15876 + 252 + 1 = 16129$$

$$128^2 = 16129 + 254 + 1 = 16384$$

$$129^2 = 16384 + 256 + 1 = 16641$$

$$130^2 = 16641 + 258 + 1 = 16900$$

$$131^2 = 16900 + 260 + 1 = 17161$$

$$132^2 = 17161 + 262 + 1 = 17424$$

$$133^2 = 17424 + 264 + 1 = 17689$$

$$134^2 = 17689 + 266 + 1 = 17956$$

$$135^2 = 17956 + 268 + 1 = 18225$$

$$136^2 = 18225 + 270 + 1 = 18496$$

$$137^2 = 18496 + 272 + 1 = 18769$$

$$138^2 = 18769 + 274 + 1 = 19044$$

$$139^2 = 19044 + 276 + 1 = 19321$$

$$140^2 = 19321 + 278 + 1 = 19600$$

$$141^2 = 19600 + 280 + 1 = 19881$$

$$142^2 = 19881 + 282 + 1 = 20164$$

$$143^2 = 20164 + 284 + 1 = 20449$$

$$144^2 = 20449 + 286 + 1 = 20736$$

$$145^2 = 20736 + 288 + 1 = 21025$$

$$146^2 = 21025 + 290 + 1 = 21316$$

$$147^2 = 21316 + 292 + 1 = 21609$$

$$148^2 = 21609 + 294 + 1 = 21904$$

$$149^2 = 21904 + 296 + 1 = 22201$$

$$150^2 = 22201 + 298 + 1 = 22500$$

$$151^2 = 22500 + 300 + 1 = 22801$$

$$152^2 = 22801 + 302 + 1 = 23104$$

$$153^2 = 23104 + 304 + 1 = 23409$$

$$154^2 = 23409 + 306 + 1 = 23716$$

$$155^2 = 23716 + 308 + 1 = 24025$$

$$156^2 = 24025 + 310 + 1 = 24336$$

$$157^2 = 24336 + 312 + 1 = 24649$$

$$158^2 = 24649 + 314 + 1 = 24964$$

$$159^2 = 24964 + 316 + 1 = 25281$$

$$160^2 = 25281 + 318 + 1 = 25600$$

$$161^2 = 25600 + 320 + 1 = 25921$$

$$162^2 = 25921 + 322 + 1 = 26244$$

$$163^2 = 26244 + 324 + 1 = 26569$$

$$164^2 = 26569 + 326 + 1 = 26896$$

$$165^2 = 26896 + 328 + 1 = 27225$$

$$166^2 = 27225 + 330 + 1 = 27556$$

$$167^2 = 27556 + 332 + 1 = 27889$$

$$168^2 = 27889 + 334 + 1 = 28224$$

$$169^2 = 28224 + 336 + 1 = 28561$$

$$170^2 = 28561 + 338 + 1 = 28900$$

$$171^2 = 28900 + 340 + 1 = 29241$$

$$172^2 = 29241 + 342 + 1 = 29584$$

$$173^2 = 29584 + 344 + 1 = 29929$$

$$174^2 = 29929 + 346 + 1 = 30276$$

$$175^2 = 30276 + 348 + 1 = 30625$$

Aufgabe. 1.) Aus jeder, höchst vierziffrigen Zahl, die Quadratwurzel zu ziehen.

Aufst. 1.) $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{72}$ fällt zwischen 8, und 9, und ist irrational.

$\sqrt{90000} = 300$; und $\sqrt{7200}$ fällt zwischen 80, und 90.

$\sqrt{0,0009}$ ist 0,03; und $\sqrt{0,000072}$ fällt zwischen 0,008, und 0,009.

A B

$$2.) \quad \sqrt{86,49} = 9 \quad 3.$$

$$A^2 = 81$$

$$2A = 18 \quad 549$$

$$2AB = 54$$

$$B^2 = 9$$

0

§. 40.

Lehrsatz. 2) Das Quadrat einer vieltheiligen Wurzel besteht aus den Quadraten aller Theile der Wurzel, und aus den doppelten Produkten aller ersten Theile in jeden nächstfolgenden; z. B. der beyden ersten in den dritten; der drey ersten in den vierten, u. s. f. Denn

G

I.) Ist

I.) Ist die Wurzel zweytheilig, so ist

$$(a \times b)^2 = a^2 \times 2ab \times b^2$$

II.) Ist sie dreytheilig $p \times q \times r$; so setze man $p \times q = a$ und $r = b$, so ist

$$a^2 = p^2 \times 2pq \times q^2 = A$$

$$2ab = 2(p \times q) \cdot r$$

$$b^2 = r^2$$

Also des Quadrat der dreytheiligen Wurzel

$$p^2 \times 2pq \times q^2 \times 2 \cdot (p \times q) \cdot r \times r^2 =$$

$$A \times 2 \cdot (p \times q) \cdot r \times r^2 = B.$$

III.) Hat die Wurzel vier Theile $p \times q \times r \times f$; so setze man $p \times q \times r = a$; $f = b$; und ihr Quadrat ist $B \times 2 \cdot (p \times q \times r) \cdot s \times s^2 = C$

IV.) Hat sie fünf Theile, daß nämlich zu den vorigen viere noch t kömmt, so setze man die ersten viere $= a$; und $t = b$; ihr Quadrat ist also

$$C \times 2(p \times q \times r \times s) \cdot t \times t^2 = D, \text{ oder}$$

$$p^2 \times 2pq \times q^2$$

$$\times 2(p \times q) r \times r^2$$

$$\times 2(p \times q \times r) s \times s^2$$

$$\times 2(p \times q \times r \times s) t \times t^2$$

V.) Man sieht leicht daß dieses ohne Ende nach folgendem Gesetze fortgeht: wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kömmt, so kommen zu dem Quadrate zwey Stücke; ein dop-

doppeltes Produkt aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen, und das Quadrat des neuen Theils.

Zusatz. Wenn eine vieltheilige Wurzel um einen Theil wächst, so kömmt zu ihrem Quadrate so was dazu, wie zu dem Quadrate einer eintheiligen Wurzel kömmt, wenn diese zweytheilig wird.

Aufgabe. 2.) Aus jeder vielziffrigen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

$$\begin{array}{r} \text{a b c d} \\ \sqrt{41|37|06|24} = 6432 \\ a^2 = 36 \end{array}$$

$$2a = 12) 537$$

$$496$$

$$2A = 128) 4106$$

$$2AB \times B^2 = 3849$$

$$2A = 1286) = 25724$$

$$2AB \times B^2 = 25724$$

Zusatz. 1.) a.) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \&c.$

b.) $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7} \&c.$

2.) a.) $\sqrt{0,454276} = 0,674$. Denn es ist

$$G_2$$

$$\sqrt{0,}$$

$$\sqrt{0,454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} \\ = \frac{674}{1000} = 0,674.$$

$$\text{Ferner } \sqrt{0,0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0,12.$$

$$\text{b.) } \sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280} = \frac{\sqrt{8280}}{\sqrt{10000}} = \frac{90}{100} = 0,9$$

einem Theile $< \frac{1}{10}$.

$$3.) \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{0,333333 \dots} = 0,577 \dots$$

Anmerkung. Beym Ausziehen der Quadratwurzel kann man sich, zur Ersparung, oder doch Abkürzung der Arbeit der bereits berechneten *Quadrattafeln* bedienen.

§. 41.

Aufgabe. 3.) Aus einem *Polynome* in *Buchstaben*, die *Quadratwurzel* zu ziehen.

$$\text{Auß. 1.) } \sqrt{(25a^2 + 5b^2 + 30ab + 4b^2)} = 5a + 3b.$$

$$a^2 = 25a^2$$

(20)

$$(2a = \sqrt{10a}) + 30ab + 9b^2$$

$$2a b^2 + b^2 + 30ab + 9b^2$$

o

$$2.) \sqrt{(4x^4 + 16b^4 + 16b^2ax + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 8ax^3)} =$$

a b c

$$\sqrt{(4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4)} = 2x^2 + 2ax + 4b^2$$

$$4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2$$

$$2A = 4x^2 + 4ax + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$$

$$+ 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$$

o

Aufgabe. 4.) Aus einem Binom in Buchstaben $p^2 \pm q$, welches kein vollkommenes Quadrat ist, die Quadratwurzel durch Näherung zu finden.

$$\text{Aufs. } \sqrt{p^2 \pm q} = p \pm \frac{q}{2p} - \frac{q^2}{8p^3} \pm \frac{q^3}{16p^5} \dots = A.$$

$$\frac{p^2}{2p} \pm q$$

$$\pm q \pm \frac{q^2}{4p^2}$$

$$2p \pm \frac{q}{p} - \frac{q^2}{4p^2}$$

G 3

q^2

$$\begin{array}{r}
 \frac{q^2}{4p^2} - \frac{q^3}{8p^4} + \frac{q^4}{64p^6} \\
 \hline
 \frac{q^3}{8p^4} - \frac{q^4}{64p^6}
 \end{array}$$

Zusatz. Ist eine gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat; so läßt sie sich durch $p^2 \mp q$ ausdrücken, und behandeln. So

$$\text{ist } \sqrt{150} = \sqrt{(12^2 \mp 6)} = 12 \mp \frac{6}{24} - \frac{36}{8 \cdot 1728} \dots$$

$$= 12 \mp \frac{1}{4} - \frac{1}{384} \dots = 12 \mp \frac{95}{384} = 12,247395 \dots$$

$$\text{Und eben so } \sqrt{1289} = \sqrt{(36^2 - 7)} = 36 - \frac{7}{12} - \frac{49}{8 \cdot 46656} \dots = 35,902644.$$

III. Die Cubikzahlen, und Cubikwurzeln.

§. 42.

Lehrsatz. 1.) Der *Würfel* einer zweytheiligen *Wurzel*, enthält den *Würfel* beyder *Theile*, das dreyfache *Produkt* aus dem *Quadrate* des ersten *Theils* in den zweyten, und das drey-

dreyfache Produkt aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweyten.

$$\text{Denn } A^2 \times 2 A B \times B^2$$

$$\times A \times B$$

$$A^3 \times 2 A^2 B \times A B^2$$

$$\times A^2 B \times 2 A B^2 \times B^3$$

$$\text{Also } (A \times B)^3 = A^3 \times 3 A^2 B \times 3 A B^2 \times B^3 =$$

$$A^3 \times B^3 \times 3 A B (A \times B)$$

$$\text{Zusatz. 1.) } (A - B)^3 = A^3 - 3 A^2 B \times 3 A B^2 - B^3$$

2.) Sind zwey Wurzeln um *Eins* unterschieden, wie n , und $n \pm 1$; so sind ihre *Würfel* n^3 , und $n^3 \pm 3 n^2 \pm 3 n \pm 1$, folglich deren *Unterschied* die *dreyfache Summe* der vorigen *Wurzel*, und ihrer *Quadratzahl*, und überdem noch um *Eins*, $3 n^2 \pm 3 n \pm 1 = 3 (n^2 \pm n) \pm 1$.

3.) Nach diesem *Gesetze* wachsen die *Würfel* aller ganzen *Zahlen* auf folgende Art:

$$1^3 \quad 1 \quad = \quad 1 \quad = \quad 1$$

$$2^3 = 1 \times 3 (1 \times 1) \times 1 = 1 \times 7 = 8$$

$$3^3 = 8 \times 3 (2 \times 4) \times 1 = 8 \times 19 = 27$$

$$4^3 = 27 \times 3 (3 \times 9) \times 1 = 27 \times 37 = 64$$

$$5^3 = 64 \times 3 (4 \times 16) \times 1 = 64 \times 61 = 125$$

$$6^3 = 125 \times 3 (5 \times 25) \times 1 = 125 \times 91 = 216$$

$$7^3 = 649$$

$$(7+1) = 649 + 114 + 21 + 1 = 779$$

$$7^3 \quad 779$$

$$36$$

$$7^3 = 216 + 3(6 + 36) + 1 = 216 + 127 = 343.$$

$$8^3 = 343 + 3(7 + 49) + 1 = 343 + 169 = 512.$$

$$9^3 = 512 + 3(8 + 64) + 1 = 512 + 217 = 729.$$

$$10^3 = 729 + 3(9 + 81) + 1 = 729 + 271 = 1000.$$

Man sieht hieraus, daß die *Differenzen* der Würfel um ein *Produkt* von 6 in die *Zahl* wachsen, welche *angiebt*, die wie *vielte Differenz* es nach der *ersten* ist.

4. Es sey A ein Zehner, B ein Einer, und die Ziffer des Zehners = p; und die Ziffer des Einers = q; so hat man $(A + B)^3 =$

$$(p \cdot 10 + q \cdot 1)^3 = p^3 \cdot 1000 + 3p^2q \cdot 100 +$$

$$3pq^2 \cdot 10 + q^3 \cdot 1; \text{ und folglich:}$$

$$A^3 = p^3 \cdot 1000$$

$$3A^2B = 3p^2q \cdot 100$$

$$3AB^2 = 3pq^2 \cdot 10$$

$$B^3 = q^3 \cdot 1.$$

Aufgabe. 1.) Aus jeder höchstens *sechsziffrigen* Zahl die *Cubikwurzel* zu ziehen.

Aufst. 1.) a.) $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{343} = 7$; aber $\sqrt[3]{429}$ fällt zwischen 7 und 8, (und ist irrational.

b.) $\sqrt[3]{8000000} = 200$, und $\sqrt[3]{343000} = 70$; aber

$\sqrt[3]{429000}$ fällt zwischen 70, und 80.

c.)

c.) $\sqrt[3]{0,008} = 0,2; \sqrt[3]{0,000343} = 0,07$; aber

$\sqrt[3]{0,000429}$ fällt zwischen 0,07, und 0,08,

2.) $\sqrt[3]{157,464} = 54$

$a^3 = 125$

$3a^2 = 75$

$3a^2b = 300$

$3ab^2 = 240$

$b^3 = 64$

o

§. 43.

Lehrsatz. 2.) Der *Würfel* einer *vieltheiligen Wurzel* enthält den *Würfel* eines jeden *Gliedes*; das *3fache Produkt* aus allen *ersten Gliedern* in das *Quadrat* des *jedesmal nächstfolgenden*. Denn

I.) Ist die *Wurzel zweythelig*, so ist,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

II.) Ist sie *dreytheilig* $p + q + r$; so setze man

$$p + q = a; \text{ und } r = b; \text{ so ist}$$

$$a^3 = (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

$$3a^2b = 3(p + q)^2r$$

$$3ab^2 + b^3 = 3(p + q)r^2 + r^3$$

H

Also

Alfo der Würfel der dreytheiligen Wurzel

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3(p+q)^2r + 3(p+q)r^2 + r^3 =$$

$$A + 3(p+q)r^2 + 3(p+q)r^2 + r^3 = B.$$

III. Hat die Wurzel vier Theile $p + q + r + s$; fo setze man

$p + q + r = a$; und $s = b$; und ihr Würfel ist:

$$B + 3(p+q+r)^2s + 3(p+q+r)s^2 + s^3 = C.$$

IV. Hat die Wurzel fünf Theile, dafs nämlich zu den vorigen vieren noch t kömmt; fo setze man die ersten viere $= a$,

und $t = b$; ihr Würfel ist also:

$$C + 3(p+q+r+s)^2t + 3(p+q+r+s)t^2 + t^3 = D;$$

oder:

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

$$+ 3(p+q)^2r + 3(p+q)r^2 + r^3$$

$$+ 3(p+q+r)^2s + 3(p+q+r)s^2 + s^3$$

$$+ 3(p+q+r+s)^2t + 3(p+q+r+s)t^2 + t^3$$

V. Man sieht leicht, dafs dieses nach folgendem Gesetze, ohne

Ende fortgeht: wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kömmt,

fo kommen zu dem Würfel drey Stücke: ein dreyfaches

Produkt aus dem Quadrate aller vorhergehenden Glieder in das

neue; ein dreyfaches Produkt aus der Summe aller vorhergehen-

den Glieder in das Quadrat des neuen; und der Würfel des

neuen Gliedes.

Zusatz. Wenn eine vieltheilige Wurzel um einen Theil wächst, so kömmt zu ihrem Würfel so was dazu, wie zu dem Würfel einer eintheiligen Wurzel kömmt, wenn diese zweytheilig wird.

Aufgabe. 2.) Aus jeder vielziffrigen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

abcd

$$\sqrt[3]{75|955|677|875} = 4235$$

$$a^3 = 64$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ 100 \end{array} = \begin{array}{r} 3a^2 = 48 \\ 96 \end{array}) 11955$$

$$48$$

$$8$$

$$3A^2 = 5292) 1867677$$

$$3A^2 B = 15876$$

$$3A B^2 = 1134$$

$$B^3 = 27$$

$$3A^2 = 536787) 268710875$$

$$3A^2 B = 2683935$$

$$3A B^2 = 31725$$

$$B^3 = 125$$

$$\text{Zusatz. 1.) a.) } \sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{5}{7} \text{ \&c.}$$

b)

$$\text{b.) } \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} \text{ \&c.}$$

$$2.) \text{ a.) } \sqrt[3]{0,216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{6}{10} = 0,6; \text{ eben so}$$

$$\sqrt[3]{0,001728} = \sqrt[3]{\frac{1728}{1000000}} = \frac{12}{100} = 0,12 \text{ \&c}$$

$$2.) \sqrt[3]{0,5021} = \sqrt[3]{0,502100} = \sqrt[3]{\frac{502100}{1000000}} = \frac{78}{100}$$

$$= 0,78 \dots \text{ so ist auch } \sqrt[3]{0,5121} = \sqrt[3]{0,512100}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{512100}{1000000}} = \frac{80}{100} = 0,8 \dots$$

$$3.) \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0,666666 \dots} = 0,87 \dots$$

$$4.) \sqrt[3]{18 \frac{26}{27}} = \sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}. \text{ Eben so ist}$$

$$\sqrt[3]{64,421875} = 4,75; \text{ ferner } \sqrt[3]{10,3954} =$$

$$\sqrt[3]{10,395400} = \frac{202}{100} = 2,02.$$

Anmerk. Beym Ausziehen der Cubikwurzel kann man die Cubiktafeln zu Hülfe nehmen.

§. 44.

Aufgabe. 3.) Aus einem Polynom in Buchstaben die Cubikwurzel zu ziehen.

$$\text{Aufs. 1.) } \sqrt[3]{27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3} = 3a - 2b;$$

$$a^3 = 27a^3$$

$$(3a^3 = 27a^3) - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3 =$$

$$3a^2b = -54a^2b$$

$$3ab^2 - b^3 = -36ab^2 - 8b^3$$

$$2.) \quad \sqrt[3]{(M + N)} = 2a - 3b + c$$

$$M = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

$$(a + b)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

$$(3A^2 = 12a^2 - 36ab + 27b^2)$$

$$N = -12a^2c - 36abc + 27b^2c + 6ac^2 - 9bc^2 + c^3$$

$$2A^2c = -12a^2c - 36abc + 27b^2c$$

$$3Ac^2 + c^3 = 6ac^2 - 9bc^2 + c^3$$

Aufgabe. 4.) aus einem Binom in Buchstaben $p^3 \mp q$, welches kein vollkommener Cubus ist, die Cubikwurzel durch Näherung zu finden.

$$\text{Auf. } \sqrt[3]{p^3 + q} = p + \frac{a}{3p^2} - \frac{b}{9p^5} + \frac{5q^3}{81p^8} - \dots = A.$$

$$a^3 = p^3$$

$$3a^2 + 3a^2b = q$$

$$3ab^2 + b^3 = \frac{q^2}{3p^3} + \frac{q^3}{27p^6}$$

$$(3(a+b)^2) = \frac{q^2}{3p^3} + \frac{q^3}{27p^6}$$

$$3(a+b)^2c = \frac{q^2}{3p^3} + \frac{2q^3}{9p^6} + \frac{q^4}{27p^9}$$

$$3(a+b)c^2 + c^3 = \frac{q^4}{27p^9} + \frac{q^5}{81p^{12}} + \frac{q^6}{729p^{15}}$$

$$(3(a+b+c)^2) = \frac{5q^3}{27p^6} + \frac{q^5}{81p^{12}} + \frac{q^6}{729p^{15}}$$

Zusatz. Ist eine gegebene Zahl kein vollkommener Würfel; so läßt sie sich durch $p^3 + q$ ausdrücken, und behandeln.

IV. Die Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 45.

Lehrsatz. 1.) Jede Potenz der Zahl 2 ist größer, als ihr Exponent.

Be-

Beweis. Gesetzt es sey $n > 1$, und $2^n > n$ so folgt aus dem ersten, daß $2 \cdot n > n + 1$; und aus dem zweyten, daß $2 \cdot 2^n > 2n$; d. i. $2^{n+1} > 2n$; folglich noch vielmehr $2^{n+1} > n + 1$. Ist also der Satz von der n ten Potenz der Zahl 2 wahr; so ist er es auch von der $n + 1$ ten, oder der zunächstfolgenden Potenz. Nun ist offenbar $2^1 > 1$ und $2^2 > 2$, also der Satz von der ersten und zweyten Potenz der Zahl 2 wahr, daher ist er es auch von der 3ten, und daher auch von der vierten, und so weiter von allen folgenden Potenzen der Zahl 2, und ist also allgemein.

Lehrsatz. 2.) Wird eine Gröſſe A halbiert, und ihre Hälfte wieder halbiert, und immer so fort: so läßt sich durch eine gewisse Anzahl fortgesetzter Halbirungen eine Gröſſe finden, die kleiner ist, als jede beliebig angenommene Gröſſe C derselben Art, quavis data minor, Denn

weil A und C von einerley Art sind; so giebt es eine gewisse Zahl m, wodurch $A < m \cdot C$ wird; daß

folglich auch $\frac{A}{2^m} < \frac{m \cdot C}{2^m}$ ist. Nun ist $m < 2^m$;

also $\frac{m}{2^m}$ ein ächter Bruch, und daher $\frac{m}{2^m} \cdot C < C$;

folglich ist noch vielmehr $\frac{A}{2^m} < C$.

Zu-

Zusatz. 1.) Von dem Bruche $\frac{1}{2}$ läßt sich eine bestimmte Potenz finden, die kleiner, als jeder beliebig angegebene Bruch ist.

2.) Dieses gilt noch vielmehr von einem Bruche, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; und folglich auch von einem ächten Bruche, welcher die Einheit zum Zähler hat.

§. 46.

Erklärung. Eine Gröſſe nähert sich ohne Ende einem gewissen Werthe, (ihrer Gränze) wenn ihr Unterschied von diesem Werthe kleiner, als jede angegebene Gröſſe werden kann.

Zusatz. 1.) Man kann eine solche Gröſſe ihrer Gränze gleich setzen.

2.) Die Reihen (§. 31.) nähern sich ohne Ende dem Werthe der Brüche $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{a}{a-x}$, als ihren Gränzen; man kann sie also diesem Werthe gleich setzen.

3.) Eben dieses gilt von den Irrationalzahlen, (§. 36. Zuf.) die sich zwar nie völlig genau, aber doch so genau angeben lassen, daß das noch fehlende kleiner wird, als jede gegebene Zahl, quovis dato minus.

4.) In der *Ausübung* kann man zu jedem Gebrauche bey ei-

nem Paare dieser Gränzen stehen bleiben, und die eine statt der andern, oder statt der dazwischen liegenden Gröfse, ohne merklichen Fehler setzen. Für die *Theorie* aber gilt dies nur in so fern, als sich diese Gränzen ohne Ende einander noch immer weiter nähern können, dafs der Unterschied sich nicht angeben läfst.

5.) Die Sätze, die von *Rationalzahlen* bewiesen worden, müssen auch von *Irrationalzahlen* gelten, und sind also *allgemein*.

§. 47.

Erklärung. 2.) Ein Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, welcher anzeigt, dafs aus einer beliebigen Gröfse a , die *Wurzel* eines beliebigen Grades n gezogen werden solle, heifst eine *Wurzelgröfse*.

Aufgabe. 1.) Wurzelgröfssen gleichnamig zu machen, oder unter einerley Benennung zu bringen.

Aufl. Statt $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[4]{b^3}$ kommt $a^{\frac{2}{3}}$ und $b^{\frac{3}{4}}$; oder $a^{\frac{8}{12}}$ und $b^{\frac{9}{12}}$

das ist $\sqrt[12]{a^8}$ und $\sqrt[12]{b^9}$; wodurch die Wurzeln einerley Exponenten haben.

Zusatz. 1.) Daher entsteht die Regel: multiplicire den Exponenten jeder Gröfse mit dem Wurzelexponenten der

ändern; so giebt das Produkt beyder Wurzelexponenten den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten.

So giebt $\sqrt[r]{a^m}$ und $\sqrt[s]{a^n}$ die die gleichnamigen Wurzeln $\sqrt[rs]{a^{ms}}$ und $\sqrt[rs]{a^{nr}}$.

$$2.) \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3 \cdot 2]{a^{4 \cdot 2}}, \text{ und } \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4 \cdot 2]{a^{2 \cdot 2}} = \sqrt[2]{a}.$$

Aufgabe. 2.) Wurzelgrößen miteinander zu multipliciren, oder zu dividiren.

Aufl. 1.) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, und $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$. Desgleichen ist

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (ac)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ac}; \text{ also } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{ac}.$$

$$\text{und } a^{\frac{1}{n}} : c^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{c}}; \text{ also } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\frac{a}{c}}.$$

$$2.) \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[q]{c} = \sqrt[pq]{a^q} \cdot \sqrt[pq]{c^p} = \sqrt[pq]{a^q \cdot c^p} \text{ und}$$

$$\sqrt[p]{a} : \sqrt[q]{c} = \sqrt[pq]{a^q} : \sqrt[pq]{c^p} = \sqrt[pq]{\frac{a^q}{c^p}}$$

Aufgabe. 3.) Eine Wurzelgröße in eine Potenz zu erheben, oder aus derselben eine Wurzelgröße zu ziehen.

$$\text{Aufl. 1.) } (\sqrt[n]{a})^2 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^2}; \text{ und } (\sqrt[n]{a})^3 = (\sqrt[n]{a})^2 \cdot \sqrt[n]{a}$$

$$= \sqrt[n]{a^3}; \text{ oder allgemein } (\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2.)

$$2.) \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}; \text{ daher auch } \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} \\ = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}.$$

Zusatz. 1.) $\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = a \sqrt[m]{b}.$

$$2.) a \sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^2} = \sqrt[n]{a^{2n}}; \text{ und}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^2}}{a} = \frac{\sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{a^2}{a^n}}$$

Aufgabe. 4.) Wurzelgrößen zu addiren, oder zu subtrahiren.

Aufl. 1.) $\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$

$$(3 + 2)\sqrt{2} = \sqrt{50}. \text{ Auch ist } \sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} =$$

$$\sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}. \text{ Auch ist } \sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}}$$

$$= \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{\frac{16 \cdot 3}{27 \cdot 3}} = 4\sqrt{3} - \frac{4}{9}\sqrt{3} =$$

$$\left(4 - \frac{4}{9}\right)\sqrt{3}.$$

$$2.) \sqrt{12} - \sqrt{6} = \sqrt{(\sqrt{12} - \sqrt{6})^2} = \sqrt{18 - \sqrt{288}}.$$

Anmerk. Die Rechnungen mit *zusammengesetzten* Wurzelgrößen, gründen sich gänzlich auf die Regeln für einfache Wurzelgrößen.

Lehrsatz. 3.) a.) Ist das Quadrat einer *Irrationalgrösse*, *rational*, so sind alle *gerade* Potenzen derselben auch *rational*, alle *ungerade* aber *irrational*.

Bew. Wenn a rational, und $\sqrt{a}$ irrational ist; so ist

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a, \text{ folglich rational. Eben}$$

so ist $(a^{\frac{1}{2}})^{2n} = a^n$ folglich auch rational. Hinge-

gen $(a^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^n \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^n \cdot \sqrt{a}$, folglich *irrational*.

b.) Von der *bejahten Grösse* sind *alle Potenzen bejaht*, von jeder *verneinten Grösse* aber, *alle gerade Potenzen bejaht*, *alle ungerade verneint*. Denn

$$(\mp a)^2 = \mp a^2; \text{ ferner } (\mp a)^{2n} = (\mp a^2)^n = \mp a^{2n}$$

$$(\mp a)^{2n+1} = \mp a^{2n} \cdot \mp a = \mp a^{2n+1}; \text{ aber}$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Zusatz. 1.) $\sqrt[2n]{9} = \mp 3; \sqrt[3]{8} = \mp 2; \sqrt[3]{-8} = -2.$

2.) $\sqrt{-a}$ ist ein Ausdruck einer *unmöglichen*, oder *eingebildeten Grösse*.

$$3.) \sqrt[n]{-a} = -a^{\frac{1}{n}} = (-a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[n]{-a}}$$

$$4.) (\sqrt{-a})^2 = -(a^{\frac{1}{2}})^2 = -p. \text{ Oder}$$

$$(\sqrt{-a}) \cdot (\sqrt{-a}) = \sqrt{a^2} = -p;$$

c.) Von einer *eingebildeten* Zahl $\sqrt{-a}$, deren *Quadrat* $-a$ möglich ist; sind alle *gerade Potenzen reell*; alle *ungerade* aber *eingebildet*. Denn

$$(\sqrt{-a})^{2n} = (-a)^n \text{ also reell; und}$$

$$(\sqrt{-a})^{2n+1} = (\sqrt{-a})^{2n} \cdot \sqrt{-a}, \text{ also eingebildet.}$$

Der dritte Abschnitt.

Von der Vergleichung der Zahlen.

I. Die Arten, Zahlen zu vergleichen.

§. 49.

Erklärung. 1.) Vergleicht man zwey Zahlen in Absicht auf die Grö-
sse, welche die eine gegen die andere hat; so be-
trachtet man ihr *Verhältniß*, ratio; welches entwe-

der *arithmetisch*, arithmetica; oder *geometrisch*, geometrica, genannt wird, je nachdem die Vergleichung mittelst der *Subtraction*, oder der *Division* geschieht.

2.) Die Zahlen, die man mit einander vergleicht, heißen die *Glieder*, termini des Verhältnisses; wobey es willkürlich, welches man zum *Vordergliede*, antecedens, oder *Hintergliede*, consequens, machen will.

3.) Die *Differenz*, welche das *Vorderglied* vom *Hintergliede* subtrahirt giebt, heisst der *Name*, nomen, des *arithmetischen* Verhältnisses; der *Quotient* aber, welchen das *Vorderglied* in das *Hinterglied* dividirt giebt, heisst der *Name des geometrischen Verhältnisses*.

Zusatz. Ist das *Vorderglied* $>$ *Hinterglied*: so ist der *Name* des *arithmetischen* Verhältnisses *negativ*; und der *geometrischen*, ein *ächter Bruch*.

4.) Sind *mehrere Verhältnisse* der Art, daß das *Hinterglied* des einen, das *Vorderglied* des andern ist; so heißen dergleichen Verhältnisse *zusammenhängende*, oder *stetige*, continuæ, alle andere aber *abgesonderte*, discretæ.

§. 50.

Erklärung. 1.) *Gleiche Verhältnisse* sind, die *gleiche Namen* haben; und die *Gleichheit zweyer Verhältnisse* heisst eine *Proporti-*

tion, die wie die Verhältnisse, entweder *arithmetisch*,
 oder *geometrisch*, desgleichen entweder *stetig*, oder
 abgesondert ist.

2.) Zu einer Proportion gehören 4; und wenn sie stetig ist,
 3 Glieder. Das letzte, und erste Glied heißen die
äußersten, *extremi*, das zweyte, und dritte aber die
mittlern, *medii*. Bey der stetigen Proportion sind bey-
 de gleich, und machen das *mittlere* Glied aus. *Gleich-*
namige, oder *ähnlich liegende*, *homologi*, heißen die
 Vorderglieder, oder die Hinterglieder.

3.) Eine *Menge Zahlen*, die alle in *gleichen stetigen Ver-*
hältnissen, die folglich einen gemeinschaftlichen Namen
 haben, fortgehen, machen eine *Progression*, oder *Rei-*
he, welche, wie die Verhältnisse, entweder *arithmetisch*,
 oder *geometrisch* ist.

II. Die arithmetischen Proportionen.

§. 51.

Grundsatz. Das *Hinterglied* eines jeden arithmetischen Verhältnisses
 entsteht, wenn man den *Namen*, er mag bejahend, oder
 verneinend seyn, zum *Vordergliede* addirt.

Zusatz. 1.) $a - (a \mp d)$; und $b - (b \mp g)$ Sind *allgemei-*
ne Formen zweyer Verhältnisse;

2.)

2.) $a - (a \mp d) = b - (b \mp d)$ ist die *allgemeine Form der arithmetischen Proportion*; und $a - (a \mp d) = (a \mp d) - (a \mp 2d)$ oder $\div a : a \mp d, a \mp 2d$ ist die *allgemeine Form der stetigen Proportion*.

§. 52.

Lehrsatz. Die *Summe der äussern Glieder* ist bey einer *abgesonderten Proportion*, der *Summe der mittlern Glieder*; bey einer *stetigen Proportion* aber, dem *doppelten mittlern Gliede* gleich.

Denn von der *abgesonderten Proportion* $a - (a \mp d) = b - (b \mp d)$ ist offenbar $a \mp b \mp d = a \mp d \mp b$; und von der *stetigen Proportion* $a - (a \mp d) = (a \mp d) - (a \mp 2d)$ ist offenbar $a \mp a \mp 2d = (a \mp d) \mp (a \mp d) = 2(a \mp d)$.

Zusatz. 1.) Ist $a - (a \mp d) = b - x$; mithin

$$a \mp x = (a \mp d) \mp b$$

$$- a = - a$$

$$x = b \mp d \text{ also}$$

$$a - (a \mp d) = b - (b \mp d)$$

$$2.) \div a : x : a \mp 2d \text{ mithin}$$

$$2x = 2a \mp 2d$$

$$x = \frac{2a + 2d}{2}$$

$$\frac{a + 2a + 3a + \dots + (n-1)a + na}{n} = \frac{na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2d}{n} = \frac{na + n(n-1)d}{n}$$

Zwischen 54 und 68 ist das *mittlere Glied*, oder das *arithmetische Mittel* $= \frac{54 + 68}{2} = 61$, folglich

$$\div 54 \cdot 61 \cdot 68.$$

3.) Auf ähnliche Art, macht man im gemeinen Leben sowohl, als in Wissenschaften den *Durchschnitt*, oder die *Mittelzahl*, wenn man die *Summe* mehrerer Größen mit ihrer *Anzahl* dividirt. So ist von 3, 5, 7, 9,

der Durchschnitt, oder die Mittelzahl $\frac{3 + 5 + 7 + 9}{4}$

$$= \frac{24}{4} = 6$$

III. Die arithmetischen Progressionen.

§. 53.

Grundsatz. Jedes folgende Glied einer arithmetischen Progression *entsteht*, wenn man zu dem nächst vorhergehenden Gliede den

K

ge-

gemeinschaftlichen Verhältnissnamen, er mag bejahend, oder verneinend feyn, addirt.

Zusatz. 1.) $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d a + (n-1)d$

ist die *allgemeine Form* der arithmetischen Progression. Die Zahl, welche anzeigt, dass wievielte Glied der Reihe ein jedes Glied sey, heisse der *Zeiger, index*. Auch ist $a + (n-1)d$ das *allgemeine Glied der Reihe*.

2.) Wenn *jedes folgende Glied* der Reihe R irgend ein *vorhergehendes* M, und die *Zahl* der von M bis R gehenden Glieder r heisst; so ist $R = M + (r-1)d$ und $M = R - (r-1)d$.

3.) $\frac{R - M}{r - 1} = d$,

4.) $\frac{B - A}{n - 1} = d$. Eine Formel zum *Interpoliren*.

5.) $\div A . a . b . c . B . d . e . f . C . g . h . k . D u . f . w .$

§. 54.

Lehrsatz. In jeder arithmetischen Reihe ist die *Summe der beyden äussersten Glieder* der *Summe jeder zweyer von den äussersten gleichweit*

weit abstehender Glieder, und bey *ungerader* Anzahl der Glieder, dem *mittelsten doppelt* genommen gleich. Denn bedeuten a , und u , die äußersten Glieder: so ist das r te Glied vom Anfange $= a + (r-1)d$, und das r te Glied vom Ende $= u - (r-1)d$; folglich ihre Summe $= a + (r-1)d + u - (r-1)d = a + u$. Bedeutet bey *ungerader* Anzahl der Glieder, das r te Glied das mittelste: so ist solches zugleich das r te vom

Anfange, und vom Ende, folglich $= \frac{a + u}{2}$

Zusatz. 1.) $S = \frac{a + u}{2} \cdot n$ wobey $u = a + (n-1)d$.

2. Aus a , n , d , findet man u , und hieraus S .

Aufg. a.) Die Summe der ersten 1000 natürlichen Zahlen zu finden.

b.) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen zu finden.

3.) $S = (2a + nd - d) \frac{n}{2}$; wodurch man S unmittelbar aus a , n , d , findet.

4.) Ist $d = a$; so ist $u = an$, und $S = \frac{n(n+1)a}{2}$; in welchem Falle man u , und S , aus a , und n , findet.

5.)

$$5.) n = \frac{u - a + d}{d}, \text{ und } S = \frac{a + u}{2} \cdot \frac{u - a + d}{d};$$

wodurch aus a , u , und d , man n , und hieraus S , findet.

Anmerk. Auf diese Art lassen sich noch mehrere Aufgaben für arithmetische Reihen auflösen. Denn überhaupt, wenn von den *fünf* Dingen a , u , d , n , S , *drey* gegeben sind; so lassen sich daraus die *beyden* übrigen finden.

IV. Die geometrischen Proportionen.

§. 55.

Grundsatz. Das *Hinterglied* jedes *geometrischen Verhältnisses* entsteht, wenn man das *Vorderglied* mit dem *Namen*, er mag eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder eine Irrationalzahl seyn, *multiplicirt*.

Zusatz. 1.) $a : ae$, und $b : bm$ ist die *allgemeine Form zweyer Verhältnisse*. Ist nun $e < m$ so ist $a : ae > b : bm$; und umgekehrt $b : bm < a : ae$.

2.) $a : ae = b : be$ ist die *allgemeine Form der geometrischen Proportion*; und wenn $b = ae$, die Form der *stetigen* $a : ae = ae : ae^2$, oder $\div a \cdot ae \cdot ae^2$.

3.)

3.) Ist $a : b = m : n$, und $c : d = m : n$; so ist $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$

und $\frac{d}{c} = \frac{n}{m}$ folglich $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ also $a : b = c : d$.

4.) Ist $a : b = c : d$ so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; und $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also auch $b : a = d : c$.

5.) Für die *Multiplication* ist $FQ = P$, d. i. $1 : F = Q : P$;

und für die *Division* $\frac{P}{F} = Q$, das ist $P : F = Q : 1$.

§. 56.

Erklärung. 1.) *Verhältnisse der Gleichheit*, ratio æqualitatis heisst, wenn das Vorderglied dem Hintergliede gleich ist, der *Ungleichheit* aber, ratio majoris, vel minoris inæqualitatis, wenn das Vorderglied gröfser, oder kleiner, als das Hinterglied ist.

2.) Kehrt man die Glieder eines Verhältnisses um; so heisst das neue Verhältniss, das *umgekehrte*, oder *verkehrte*, ratio reciproca, des vorigen, das alsdann das *gerade*, directa, heisst.

3.) Ein Verhältniss heisst *rational*, oder *irrational*, je nachdem

dem ihr Name rational, oder irrational ist. Letzterer kann der Wahrheit immer näher, und näher gebracht werden.

§. 57.

Lehrsatz. 1.) Werden zwey Zahlen A, B, mit einerley m, multiplicirt, oder dividirt: so verhalten sich die Produkte, oder die Quotienten, wie diese Zahlen. Denn

$$\text{da } \frac{B}{A} = \frac{mB}{mA} = \frac{B:m}{A:m}; \text{ so ist } A:B =$$

$$mA:mB = \frac{A}{m}:\frac{B}{m}.$$

Zusatz. 1.) Weil $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ so ist $\frac{mB}{A} = \frac{mD}{C}$; und

$$\frac{B}{mA} = \frac{D}{mC}.$$

2.) $\frac{a}{c}:\frac{b}{c} = a:b$; und $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd} = ad:bc$.

3.) $\frac{a}{m}:\frac{a}{n} = \frac{1}{m}:\frac{1}{n} = \frac{n}{mn}:\frac{m}{mn} = n:m$.

4.)

4.) Von dem geraden Verhältnisse $a : b$, ist $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ das

umgekehrte.

5.) Jedes Rationalverhältniß läßt sich in ganzen, und zwar in den kleinsten Zahlen angeben.

6.) $\sqrt{28} : \sqrt{63} = 2\sqrt{7} : 3\sqrt{7} = 2 : 3$. Also können Verhältnisse rational seyn, deren Glieder Irrationalzahlen sind.

7.) Irrationalverhältnisse lassen sich Rationalverhältnissen, als ihren Grenzen ohne Ende nähern.

§. 58.

Lehrsatz. 2.) Das Produkt der äussern Glieder ist bey einer abgesonderten Proportion, dem Produkte der mittlern Glieder; bey einer stetigen Proportion aber, dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich. Denn bey der abgesonderten

Proportion $A : B = C : D$, ist $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$; folglich

$\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AC}$; also $BC = AD$, und ist $B = C$;

also die Proportion stetig: so ist $B^2 = AD$.

Zusatz. 1.) In einer stetigen Proportion ist $B = \sqrt{AD}$

2.)

- 2.) Ist in $\div A.B.D$; $A = 1$: so ist $D = B^2$ und
 $\sqrt{D} = B$.
- 3.) Sind in der Proportion $A:B = C:D$; alle Glieder *einerley Art*; so ist auch $A:C = B:D$;
- 4.) Ist $AD = BC$; so ist $A:B = C:D$.

§. 59

Lehrsatz. 3.) Sind vier Zahlen proportionirt, $A:B = C:D$; so ist

1.) $A \mp C : B \mp D = A:B = C:D$; denn

da $AD = BC$; so ist

$AD \mp CD = BC \mp CD$; d. i.

$(A \mp C) D = (B \mp D) C$; folglich

$A \mp C : B \mp D = C:D$.

2.) $A \mp B : C \mp D = A:C = B:D$. Denn

da $AD = BC$; so ist

$AD \mp BD = BC \mp BD$; d. i.

$(A \mp B) D = (C \mp D) B$. folglich

$A \mp B : C \mp D = B:D = A:C$.

Zusatz. 1.) $A \mp B : B = C \mp D : D$. oder

$A \mp B : A = C \mp D : C$; und durch *Umkehrung*

$A : A \mp B = C : C \mp D$.

2.)

2.) Auch bey *mehr*, als *zwey* gleichen Verhältnissen $A : B = C : D = E : F = G : H$; ist $(A \times C \times E \times G) : B \times D \times F \times H = A : B = C : D$ u. f. f.

§. 60.

Lehrsatz. 4.) Werden die *Glieder zweyer Proportionen*, als $a : b = c : d$, und $e : f = g : h$; nach der *Ordnung multiplicirt* *miteinander*: so sind die *Produkte* in der *Ordnung* auch *proportionirt*. d. i.

$ae : bf = cg : dh$. Denn

wenn $a : b = c : d$; so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; und

wenn $e : f = g : h$; so ist $\frac{f}{e} = \frac{h}{g}$; und hieraus

$\frac{b}{a} \cdot \frac{f}{e} = \frac{d}{c} \cdot \frac{h}{g}$ folglich $ae : bf = cg : dh$.

Anmerk. Auch gilt der Satz von der *Division*.

Zusatz. 1.) Der Satz gilt auch von *mehrern* Proportionen.

2) Ist $a : b = c : d$; so ist auch $a^m : b^m = c^m : d^m$; und

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

3.) Aus beyden Proportionen

L

b:

$a : b = c : d$; und
 $b : f = d : g$. folgt (*ordinatim*, & *ex æquo*) die
 dritte $a : f = c : g$. und aus

$$a : b = c : d$$

$$b : f = g : c \text{ folgt } \textit{perturbate}, \text{ \& ex æquo}$$

$$a : f = g : d.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4.) \text{ Ist } a : b = a : b \\ a : b = b : c \\ a : b = c : d \end{array} \right\} \text{ so ist } a^2 : b^2 = a : c$$

$$a^3 : b^3 = a : d; \text{ u. f. w.}$$

$$\text{folglich auch } a : b = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{d}; \text{ u. f. w.}$$

V. Die sogenannten Rechnungsregeln.

§. 61.

Aufgabe. 1.) Zu drey Zahlen a, b, c , die vierte Proportionalzahl x zu finden; dafs nämlich $a : b = c : x$.

Aufl. Da $ax = bc$: so ist $x = \frac{bc}{a}$. Wäre $b = c$, so wäre

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

Anmerk. 1.) Die Vorschrift, wie man zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion, das vierte finden kann, heisst die *Regel detri, de tribus numericis*.

ris. Man theilt sie in die *gerade*, und *verkehrte* ein. Die *gerade*, oder *regula detri recta*, entsteht, wenn eine Gröſſe mit der andern in *gleichem Verhältnisse* wächst, oder abnimmt. Die *verkehrte*, oder *regula detri inversa*, entstehet, wenn eine Gröſſe in dem Verhältnisse *abnimmt*, in welchem die andere *wächst*; und *umgekehrt*.

Anmerk. 2.) Zur *geraden Regel detri* gehört unter andern:

- 1.) die *Berechnung der Waaren*, und *Preise*.
- 2.) Die *Zinsrechnung*.
- 3.) Die *Verrichtung der Arbeiter*, die *Zeit*, die sie zu einem Werke brauchen, und ihr *Taglohn*.
- 4.) Die *Reductionsrechnung*.

Zur *verkehrten Regel detri* gehört unter andern:

- 1.) Die *Berechnung der Arbeiter*, und der *Zeit*, die zu einem Werke nöthig sind.
- 2.) Die *Berechnung*, in wie viel *Zeit* ein gegebenes *Capital* eben so viel *Interessen* bringt, als ein anderes in einer gegebenen *Zeit*; imgleichen wie groß das erstere *Capital* seyn muß, wenn die *Zeit* für dasselbe gegeben ist.
- 3.) Die *Berechnung der Länge der Zeuge* von *verschiedener Breite*, die zu einerley *Abficht* gebraucht werden.

§. 62

Aufgabe. 2.) Ein *ganzes* A in *ungleiche* Theile, deren *Verhältnisse*, p, q, r, u. f. w. gegeben sind, *einzutheilen*.

Aufl. Man setze die gesuchten Theile seyen x, y, z; so daß $x + y + z = A$; so ist

$$p : q = x : y \text{ und}$$

$$q : r = y : z; \text{ folglich}$$

$$p : r = x : z. \text{ Demnach ist}$$

$$p : x = q : y = r : z; \text{ folglich}$$

$$p + q + r : A = p : x = q : y = r : z,$$

was auch p, q, r für Zahlen bedeuten mögen.

Anmerk. Man nennt dies die *Theilrechnung*, *Repartitionsrechnung*; wovon eine besondere Anwendung ist:

1.) Die *Gesellschaftsrechnung*, wo mehrere Personen ungleiche Capitalien zu einem Handel hergeben.

2.) Die *Vermischungsrechnung*, *regula alligationis*, wo man eine Sache aus verschiedenen Bestandtheilen zusammensetzen soll. So, daß diese in gegebenen Verhältnissen gegen einander stehen.

§. 63.

Aufgabe. 3.) Es bedeuten V, v, Urfachen; T, t, Zeiten; E, e, Wirkungen; man soll das Verhältniß der Wirkungen finden.

Aufl.

Auß. Ist $T = t$; so ist $V : v = E : e$; und
Ist $V = v$, so ist $V : t = E : e$; folglich
ist $Vt : vt = E : e$.

Wäre nun $E = e$; so wäre

$VT = vt$, folglich

$V : v = t : T$.

Auch ist $V : v = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$

Anmerk. Diese Aufgabe kömmt häufig vor, auch wo nicht selbst Urfachen, und Wirkungen vorhanden sind, aber wohl Dinge, die sich nach eben diesen Grundsätzen verhalten; und heist die *Regel Quinque*, die *Regel Septem* u. s. w. überhaupt aber die *zusammengesetzte Regel de tri*.

Anmerk. 2.) Auf eben den Gründen beruhet die sogenannte *Kettenregel*, bey Vergleichen von Münzen, Gewichten, u. s. w. wofür diese Form diene:

$$m : n = A : B.$$

$$o : p = B : C$$

$$q : r = C : D;$$

folglich $moq : npr = A : D$.

Anmerk. 3.) Auch gehört hieher die *zusammengesetzte Zinsrechnung*, wenn die jährlichen Zinsen mit zum Capital geschlagen, also Zinsen von Zinsen gegeben werden,

den, wofür die §. 58. Zuf. 4. gegebene Form diene.

VI. Die geometrischen Progressionen.

§. 64.

Grundsatz. Jedes folgende Glied einer geometrischen Progression entsteht, wenn man das nächstvorhergehende Glied mit dem Verhältnissnamen, wie er auch beschaffen sey, multiplicirt.

Zusatz. 1.) $\div a \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot \dots \cdot a^{n-2} \cdot a^{n-1}$ ist die allgemeine Form der geometrischen Progression. Die überschriebenen Zahlen sind die Zeiger, und der letzte Ausdruck das allgemeine Glied.

2.) $R = M e^{r-1}$; und $M = \frac{R}{e^{r-1}}$ wenn R jedes der folgenden Glieder, M: eines der vorhergehenden Glieder, und r die Zahl der Glieder von M bis R bedeutet.

$$3.) a : a^1 = a^{n-2} : a^{n-1}; a : a^2 = a^{n-3} : a^{n-1}.$$

$$4.) a : a^2 = (a)^2 : (a^1)^2; a : a^3 = (a)^3 : (a^1)^3$$

§. 65.

Lehrsatz. 1.) Die Reihe der Unterschiede einer geometrischen Progression ist auch eine geometrische Progression, die mit jener

einerley Verhältnissnamen hat. Denn, die allgemeine Form der geometrischen Progression ist:

$$a : ae : ae^2 : ae^3 : ae^4 : \dots : ae^{n-1}.$$

Ihr Unterschied ist:

$$ae - a : ae^2 - ae : ae^3 - ae^2 : \dots : ae^{n-1} - ae^{n-2}$$

oder $(e-1)a : e(e-1)a : e^2(e-1)a : \dots : e^{n-2}(e-1)a$

also wieder eine geometrische Progression von eben dem Verhältnissnamen e , wie in der Hauptreihe.

Zusatz. 1.) Man kann die zweyte, dritte, vierte, und alle folgende Reihen der Uetterschiede eben so finden, da allemal eine ähnliche geometrische Progression heraus kömmt.

2.) Die ersten Glieder der Hauptreihe, und der beyden ersten Differenzreihen machen eine zusammenhangende Proportion $a : (e-1)a : (e-1)^2 a$. wo der Verhältnissname $(e-1)$ ist.

3.) Wenn die ersten Glieder, der Hauptreihe, und der Reihen der Unterschiede, nach der Ordnung, $p; q;$

$r; s; t;$ heissen, so ist $p : q = q : r$; und weil man nun die erste Reihe der Unterschiede als eine

Hauptreihe ansehen kann; $q : r = r : s$; und nun die zweyte Differenzenreihe, als eine Hauptreihe

an-

angesehen, $r : s = s : t$; u. f. w. Also machen die ersten Glieder eine geometrische Progression aus, deren Verhältnissname $e - 1$ ist.

§. 66.

Lehrsatz. 2.) In jeder geometrischen Reihe ist das Produkt der äussersten Glieder, dem Produkte jeder zweyer davon gleich-entfernten Glieder; und wenn die Zahl der Glieder ungerade ist dem Quadrate des mittelften Gliedes gleich. Denn

1.) nach §. 62. Zuf. 3. machen zwey, von den äussersten gleichweit entfernte Glieder, mit diesen eine geometrische Proportion; da dann der Satz aus §. 56. Lehrf. erhellet. Steht das mittelfte Glied von den äussersten gleich weit ab; so macht es mit ihnen eine stetige Proportion, und der Satz erhellet aus §. 56. Zuf. 1. oder

2.) nach §. 62. Zuf. 3. ist das r te Glied vom Anfange

$a \cdot e^{r-1}$, und das r te Glied vom Ende $\frac{u}{e^{r-1}}$; folg-

lich ihr Produkt $= (a \cdot e^{r-1}) \cdot \left(\frac{u}{e^{r-1}}\right) = au$. Ist

das

das r te Glied das mittelfte; so ist solches zugleich das r te vom Anfange, und Ende; folglich $= \sqrt{au}$.

Lehrsatz. 3.) In jeder geometrischen Reihe verhält sich das *erste Glied zum zweyten*, wie die *Summe aller Glieder weniger dem letzten*, zur *Summe aller Glieder, weniger dem ersten*.

Denn *alle Glieder* in einer geometrischen Reihe sind, *ausser dem letzten, Vorderglieder*; ihre Summe ist $S - u$; und *alle, auser dem ersten, sind Hinterglieder*; ihre Summe ist $S - a$; folglich

$$a : ae = S - u : S - a.$$

§. 67.

Lehrsatz. 4.) In jeder geometrischen Reihe ist $S = \frac{ue - a}{e - 1} =$

$$\frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{(e^n - 1)a}{e - 1}. \text{ Denn}$$

1.) $a : ae = S - u : S - a$; also auch

$$ae - a : a = (S - a) - (S - u) : S - u = u - a : S - u;$$

$$\text{folglich ist } S - u = \frac{(u - a)a}{ae - a}$$

$$= \frac{u - a}{e - 1}; \text{ folglich}$$

M

S

$$S = \frac{u-a}{e-1} \times u = \frac{u-a \times ue-u}{e-1} = \frac{ue-a}{e-1}$$

Nun ist $u = ae^{n-1}$ und daher $ue = ae^n$, folglich

$$S = \frac{ae^n - a}{e-1} = \frac{(e^n - 1)a}{e-1}$$

2.) Auch ist $S = a \times ae \times ae^2 \dots \times ae^{n-1}$,
also $eS = ae \times ae^2 \times ae^3 \dots \times ae^n$

Nun $eS - S = (e-1)S = ae^n - a$; folglich

$$S = \frac{ae^n - a}{e-1} = \frac{ue-a}{e-1}$$

Zusatz. 1.) Für die *fallende* Reihe ist e ein *ächter Bruch*, folglich Zähler und Nenner verneinend, also der Quotient doch bejahend, und bleibt folglich ungeändert, wenn man beyde auch bejahend macht, und hier setzt

$$S = \frac{a-ue}{1-e} = \frac{a-aen}{1-e} = \frac{(1-e^n)a}{1-e}$$

2.) Heißt das zweyte Glied der Reihe b ; so ist $e = \frac{b}{a}$

und eins läßt sich für das andere setzen.

3.) Aus den Formeln (§. 67. Lehrf. und Zuf. 1.) lassen sich u , und S finden, wenn a , n , und e , oder b , gegeben sind.

4.)

4.) Ueberhaupt kann man auch hier von den *fünf* Gröſſen, a, e, u, n , und S , wenn *drey* derselben gegeben sind, die übrigen finden; und durch die verschiedenen Versetzungen dieser Gröſſen, die Anzahl der Aufgaben vermehren; davon aber mehrere in die *Algebra* gehören.

VII. Die Zusammenſetzung der Verhältnisse.

§. 68.

Erklärung. Wenn man zwey, oder mehrere ſtetige Verhältnisse hat, wie $a : b ; b : c ; u. f. w.$ ſo ſagt man : das Verhältniß des Vordergliedes des erſten zum Hintergliede des letzten, $a : c$ ſey aus den einzelnen Verhältniſſen *zusammengesetzt*, oder in dieſelben *zerlegt*.

Zuſatz. 1.) Die *Bezeichnung* der *zusammengesetzten* Verhältnisse iſt : $a : c \left\{ \begin{array}{l} a : b \\ b : c \end{array} \right\}$; oder $a : c = (a : b) \times (b : c)$

2.) Man muß *Verhältnisse* von *Quotienten* ſorgfältig unterſcheiden. Der Quotient iſt der *Name* des Verhältniſſes ; nicht das *Verhältniß ſelbſt*.

3.) Wäre $a : b = m : n$

$b : c = q : r$; ſo iſt auch

$$a: c = (m: n) \times (q: r) \quad 4$$

$$= (a: b) \times (b: c)$$

gegeben sind, die übrigen finden; und durch die
verschiedenen Vertheilungen dieser Größen, die An-
zahl der Aufgaben vermehren; davon aber mehrere

§. 69.

Lehrsatz. 1.) Das Verhältniß zweyer Produkte, ist aus den Verhältnissen der Faktoren zusammengesetzt, oder

$$ac: bd = (a: b) \times (c: d).$$

Denn

$$\text{man setze } c: d = b: e; \text{ so ist hier } e = \frac{bd}{c}$$

und man hat:

$$a: b = a: b$$

$$c: d = b: e$$

folglich $ac: bd = a: e$; nun ist aber

$$a: e = (a: b) \times (b: e) = (a: b) \times (c: d)$$

$$\text{also auch } ac: bd = (a: b) \times (c: d)$$

Zusatz. 1.) Auf diese Art lassen sich mehrere Verhältnisse zusammen

setzen.

Wenn $a: b = a: b$

$$c: d = b: q$$

$$e: f = q: r$$

$$g: h = r: s$$

so

So ist $a c e g : b d f h = a : s = (a : b) \times (b : q) \times (q : r) \times (r : s)$
 $= (a : b) \times (c : d) \times (e : f) \times (g : h)$

Die Kettenregel ist eine solche Zusammensetzung der Verhältnisse.

2.) $ac : bc = (a : b) \times (c : c)$
 $= a : b$; also ist das Verhältniß der Gleichheit $c : c$; oder $1 : 1$; bey der Zusammensetzung der Verhältnisse, als Null anzusehen.

3.) $(f : h) \times (g : k) \times (k : g) = fgk : hkg$
 $= f : h$

und von $(g : k)$ ist $(k : g)$ so viel als $-(g : k)$

$(a : b) \times (b : a) = 1$
 $(a : b) \times (b : c) = a : c$
 $(a : b) \times (b : c) \times (c : d) = a : d$

§. 70.

Erklärung. 1.) Sind die einzelnen Verhältnisse $a : b$; $c : d$; $e : f$ u. s. w. alle einander gleich: so ist jedes derselben ein aliquoter Theil des daraus zusammengesetzten; und dieses das Vielfache eines solchen Theils. Die Zahlen, welche solchen Theil, oder solches Vielfache, d. i. die Theilung, oder Vervielfältigung eines Verhältnisses anzeigen; sollen die Exponenten des Verhältnisses (eigentlich ihrer Theilung, und Vervielfältigung) heißen.

2.) Man nennt insbesondere ein Verhältniß ein *verzwey-*
faches, *verdreyfaches* u. f. f. ratio duplicata, tripli-
 cata &c. wenn es aus zweyen, dreyen, oder meh-
 rern gleichen Verhältnissen besteht.

Zusatz. 1.) Wäre $a : b = m : n$

$b : c = m : n$

$c : d = m : n$

so ist $a : c$ doppelt so groß als $m : n$. In dieser
 Rücksicht ist alsdenn das Verhältniß $m : n$ halb so
 groß, als $a : c$ ratio subduplicata; das Verhältniß
 $a : d$ ist aber dreymal so groß, als $m : n$; und $m : n$
 $\frac{1}{3}$ des Verhältnisses $a : d$, ratio subtriplicata.

Zusatz. 1.) Wenn $a : b = b : c$; so ist $a : c = (a : b)^2$

$(a : b)^2 = 2 \cdot (a : b)$ das *verdoppelte*, duplicata,
 von $a : c$. Man setze $a = 1$; so ist $c = b^2$ oder
 das Verhältniß $1 : c$, der *Einheit zum Quadrate*, ist
 doppelt so groß, als das Verhältniß $1 : b$, der
Einheit zur Wurzel, und das Verhältniß der *Ein-*
heit zur Wurzel, halb so groß, als das Verhält-
 niß der *Einheit zum Quadrate*.

2.) Wenn $a : b = b : c = c : d$; so ist $a : d = 3(a : b)$
 und $a : b = \frac{1}{3}(a : d)$. Also wenn $a = 1$, das
 Verhältniß 1 zum *Würfel*, dreymal so groß, tri-

pl-

plicata, als 1 zur *Wurzel*; und dieses ein *drittheil* von jenem, subtriplicata.

3.) Man macht überhaupt von einem Verhältnisse ein *Viel-faches*, oder einen *Theil* eines gegebenen *Exponenten*, wenn man von den *Gliedern* des *Verhältnisses*, die *Potenz*, oder die *Wurzel* dieses *Exponenten* macht.

§. 71.

Lehrsatz. 2.) Eine geometrische Reihe, die sich mit *Eins* anfängt, enthält lauter *Potenzen* des *zweyten Gliedes* a , deren *Exponenten* die natürlichen Zahlen sind, und daher eine *arithmetische Reihe* machen. Denn

wenn ein Glied der Reihe a^m heisst, m eine ganze Zahl ist, und das nächste Glied x , so ist

$$1 : a = a^m : x; \text{ also } x = a^{m+1};$$

Wenn also ein Glied der Reihe eine Potenz ist, so ist auch das nächstfolgende eine, die einen Grad höher ist. Aber das zweyte Glied a ist eine Potenz, nämlich a^1 ; also sind es die übrigen alle; und man erhält die Reihe $\div 1, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n$.

Zusatz. 1.) Von 1, bis a^n sind n Verhältnisse, jedes so groß, als $1 : a$; oder das Verhältniss $1 : a^n$ besteht aus n

fol-

solchen Verhältnissen; oder es ist $1 : a^n =$

$n \cdot (1 : a)$; und $\frac{1}{n} (1 : a^n) = 1 : a$. Die *Exponen-*

ten der Potenzen bedeuten zugleich und eigentlich das *Vielfache eines, und desselben Grundverhältnisses*.

2.) Da $1 : a^3 = (1 : a) \times (1 : a) \times (1 : a) = 3 (1 : a)$ und $1 : a^2 = (1 : a) \times (1 : a) = 2 (1 : a)$; so ist $(1 : a^3) \times (1 : a^2) = 1 : a^5$. Allgemein $(1 : a^n) \times (1 : a^m) = (1 : a^{n+m})$

3.) Schreibt man die Reihe $\div 1 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot q$,

und ist $q = a^n$ so ist $1 : a = \frac{1}{n} (1 : q)$; $1 : b =$

$\frac{2}{n} (1 : q)$; $1 : c = \frac{3}{n} (1 : q)$ u. f. w. endlich $1 : q =$

$\frac{n}{n} (1 : q) = 1 : q$.

4.) $1 : q = 1^n : a^n$. Nun ist $1^n = 1$ folglich auch $q = a^n$;

und also $\sqrt[n]{q} = a$.

5.) Die $n \cdot 3$. gegebene Reihe kann auch ausgedrückt

werden. $1 \cdot q^{\frac{1}{n}} \cdot q^{\frac{2}{n}} \cdot q^{\frac{3}{n}} \cdot \dots \cdot q^{\frac{n}{n}}$.

6.) Also $\sqrt[m]{R^n} = R^{\frac{n}{m}}$; oder $\frac{1}{m} (1 : R^n) = 1 : R^{\frac{n}{m}}$. Die-

fes

fes heisst auch $\frac{1}{m} \cdot n (1 : R) = \frac{n}{m} (1 : R) =$

$1 : R^{\frac{n}{m}}$. Dies ist der §. 25. Zuf. 3. angedeutete Begriff von *Potenzen mit gebrochenen Exponenten*.

7.) Es sey $1 : M = 1 : R^{\frac{n}{m}}$; und $1 : N = 1 : R^{\frac{p}{q}}$; so ist $(1 : M) \times (1 : N) = 1 : MN = 1 : R^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}}$

8.) Setzt man die im Lehrsatz ausgedrückte Reihe rück-

wärts fort, $a^{\frac{p}{q}} \dots a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \cdot 1, a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \dots a^n,$

so ist $1 : a^{\frac{1}{n}} = a^n : 1 = \frac{1}{n} (1 : a^n)$. Man versteht

daraus, was $1 : a^{-m}$ oder $1 : a^{-\frac{n}{m}}$ bedeutet, wodurch der Begriff von *Potenzen mit negativen Exponenten* gegeben ist.

9.) Es sey $1 : M = 1 : R^{\frac{n}{m}}$; und $1 : N = 1 : R^{-\frac{p}{q}}$; so ist:

$$(1 : M) \times (1 : N) = 1 : MN = (1 : R^{\frac{n}{m}}) \times (1 : R^{-\frac{p}{q}})$$

$$= 1 : R^{\frac{n}{m}} \cdot R^{-\frac{p}{q}} = 1 : R^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}$$

§. 72.

Lehrsatz. 3.) Jedes Verhältniss $1 : a$. kann ohne Ende immerfort sowohl getheilt, als vervielfältiget werden. Denn

N

das

das Verhältniß $1 : a$ läßt sich *halbiren*; und dadurch erhält man $\div 1 : a^{\frac{1}{2}} : a^1$. Die beyden Verhältnisse

$1 : a^{\frac{1}{2}}$; und $a^{\frac{1}{2}} : a^1$ lassen sich wieder *halbiren*; dadurch erhält man die vier gleichen Verhältnisse $\div 1 : a^{\frac{1}{4}}$.

$a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{2}} : a^1$. Und jedes dieser Verhältnisse läßt sich wieder *halbiren*; und diese *Halbirungen* können ohne *Ende* wiederholt werden.

Eben so kann man auch das Verhältniß ohne *Ende vervielfältigen*. $\div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \dots$

Zusatz. 1.) Setzt man $1 : a^2$ mit $1 : a^{\frac{1}{2}}$ zusammen; so erhält

man $1 : a^{\frac{1}{2}} = 1 : a^2$ die Hälfte von $a^2 : a^3$, oder die mittlere zwischen a^2 und a^3 u. f. w.

2.) Kehrt man alle diese Verhältnisse um; so hat man unmittelbar auch die Theilung, und Vervielfältigung der umgekehrten Verhältnisse.

3.) Eine Zahl, die zwischen zwey Zahlen P, S , fällt, muß nothwendig einer von den mittlern Proportionalzahlen gleich seyn, die sich zwischen denselben Zahlen P, S , setzen lassen.

4.) Setzt man also $A : B = 1 : \frac{B}{A} = 1 : R$; so kann

1 :

$1 : R$ entweder durch $1 : a^n$; oder durch $1 : a^{\frac{p}{q}}$ ausgedrückt werden.

VIII. Die Logarithmen.

§. 73.

Erklärung. 1.) Eine ganze Folge *aller möglichen Verhältnisse*, die man als aus einem, und demselben *Grundverhältnisse* hergeleitet, betrachtet, heisst ein *System von Verhältnissen*.

Zusatz. Es ist eine *unzählige Menge* von Verhältnissystemen möglich.

2.) Hat man ein *gewisses System* von Verhältnissen angenommen, auch für das *Grundverhältnis* eine beliebige *Grösse* L , und für alle übrige Verhältnisse andere Grössen festgesetzt, die aus L eben so, wie ihre zugehörigen Verhältnisse aus dem Grundverhältnisse erwachsen; so nennt man diese Grössen, die sich wie die Exponenten der Verhältnisse verhalten, die *Maasse*, oder *Logarithmen* der ihnen zugehörigen Verhältnisse; und die ganze Folge dieser, einem gewissen *Systeme von Verhältnissen* zugehörigen Logarithmen, ein *System von Logarithmen*, oder ein *logarithmisches System*.

- Zusatz. 1.)* Gleiche Verhältnisse, müssen gleiche Logarithmen haben. Soll man daher gleiche Verhältnisse $1 : a$, und $1 : a$ zusammen setzen, oder ein Verhältniß $1 : a$ in gleiche Theile $1 : a^{\frac{1}{2}}$, und $a^{\frac{1}{2}} : a^1$ theilen; so muß man, um den Logarithmus des zusammen gesetzten Verhältnisses $1 : a^2$ zu erhalten zwey gleiche Logarithmen $1 L$ und $1 L$ zusammen setzen; und um den Logarithmus eines jeden Theils des getheilten Verhältnisses zu erhalten, den Logarithmus $1 L$ in gleiche Logarithmen $\frac{1}{2} L$, und $\frac{1}{2} L$ theilen.
- 2.) Setzt man daher $L = 1$; so sind die Exponenten der Verhältnisse zugleich ihre Logarithmen.
- 3.) In jedem Systeme ist der Logarithmus des Verhältnisses der Gleichheit, oder der Logarithmus der Einheit $= 0$.
- 4.) In Jedem Systeme hat das gerade Verhältniß mit seinem umgekehrten einerley Logarithmus, nur dafs die Zeichen entgegengesetzt sind.
- 5.) Der Logarithmus des zusammen gesetzten Verhältnisses, ist die Summe der einzelnen Logarithmen, sie mögen positiv, oder negativ seyn.

§. 74.

Lehrsatz. 1.) Man findet den Logarithmus eines *Produkts*, wenn man die *Logarithmen der Faktoren* addirt; und den Logarithmus eines *Quotienten*, wenn man vom *Logarithmus des Dividendus*, den *Logarithmus des Divisors* subtrahirt. Denn

1.) $\text{Log. } pq$ ist eigentlich $\text{Log. } (1 : pq)$

Nun ist $1 : pq = 1 : p \times 1 : q$; folglich

$$\text{Log. } (1 : pq) = \text{Log. } (1 : p) \times 1 : q = \text{Log. } 1 : p \\ \times \text{log. } 1 : q; \text{ oder } \text{log. } pq = \text{log. } p \times \text{log. } q.$$

2.) $\text{Log. } \frac{n}{m}$ ist eigentlich $\text{Log. } (1 : \frac{n}{m}) = \text{log. } (m : n)$

Nun ist $m : n = 1 : n \times m : 1 = 1 : n - 1 : m$, folglich

$$\text{ist } \text{log. } (1 : \frac{n}{m}) = \text{log. } 1 : n - \text{log. } 1 : m; \text{ oder}$$

$$\text{log. } \frac{n}{m} = \text{log. } n - \text{log. } m.$$

2.) Man findet den Logarithmus einer *Potenz*, wenn man den *Logarithmus der Wurzel*, mit dem *Exponenten der Potenz* multiplicirt; und den *Logarithmus einer Wurzel*, wenn man den *Logarithmus der Potenz* mit dem *Exponenten der Wurzel* dividirt. Denn

1.) Log. a^3 ist eigentlich $\log. (1 : a^3)$ Nun ist

$$1 : a^3 = (1 : a) \times (1 : a) \times (1 : a). \text{ Folglich}$$

$$\log. (1 : a^3) = \log. 1 : a \times \log. 1 : a \times \log. 1 : a \\ = 3 \log. 1 : a \text{ oder } \log. a^3 = 3 \log. a.$$

2.) Folglich auch $\frac{\log. a^3}{3} = \log. a.$

§. 75.

Erklärung. 3.) Setzt man das *Grundverhältniß* $1 : 10$; und ihren *Logarithmus* 1 ; so hat man das *gemeine System*, oder das *Briggisch - Vlacqische*; wo N die Reihe der *Decimalzahlen*, und L die Reihe der *Logarithmen*, welche hier die *Exponenten der Verhältnisse* selbst sind, bedeutet:

$N.)$ $1. \quad 10. \quad 100. \quad 1000. \quad 10000. \quad 100000.$

$L.)$ $0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.$

Zusatz. Die *Logarithmen* der *decadischen Zahlen* findet man, wenn man durch das *Interpoliren* einer *geometrischen Progression*, deren *Grundverhältniß* $1 : 10$ ist, die *Logarithmen* für die *Primzahlen* berechnet, und aus diesen die *Logarithmen* der *zusammengesetzten Zahlen* bestimmt.

Anmerk. Nach dieser mühsamen Methode sind wirklich die *Logarithmen* aller Zahlen von 1 bis 100000 berechnet; aber von diesen nur diejenigen in die *Tafeln*

ge-

gebracht, welche Verhältnissen, die durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, zugehören, und der Kürze wegen, Logarithmen solcher Zahlen heißen.

4.) Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1, und 10 sind > 0 , und < 1 ; derer zwischen 10, und 100 sind > 1 , und < 2 u. f. w. Da man sie nun durch Decimalzahlen anzeigt; so besteht jeder aus einer ganzen Zahl, und aus einem Decimalbruche, wovon jener die *Kennziffer*, oder *Charakteristik*; dieser aber die *Mantissa* heisst.

Anmerk. Die *kleinern Tafeln* gehen bis zu der Zahl 10000, und liefern nur 7 Stellen der *Mantissa*. Die *größern* gehen theils bis zu 100000, und drüber; theils geben sie 10, und mehrere Stellen der *Mantissa* an.

§. 76.

Aufgabe. 1.) Den jeder gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmus aus den *Tafeln* zu finden.

Auflösung. I.) Wenn die gegebene Zahl höchstens 4 Ziffern enthält.

$$\text{Log. } 4537 = 3,6567688.$$

$$\text{Log. } 4,537 = 0,6567688.$$

$$\text{Log. } 0,004537 = 0,6567688 - 3 \text{ u. f. w.}$$

II.)

II.) Wenn die gegebene Zahl über vier Ziffern enthält.

Es sey die Zahl 4738425 gegeben; so ist

$$\log. 4739 - \log. 4738 = *,6756867 - *,6755951 = 916. \text{ Nun setze man:}$$

$$1:0,425 = 916:x; \text{ so ist } x = 389$$

welches zum $\log. 4738$ addirt, giebt

$$*,6756340. \text{ Demnach ist:}$$

$$\log. 4738425 = 6,6756340.$$

$$\log. 47,38425 = 1,6756340.$$

$$\log. 0,4738425 = 0,6756340 - 1; \text{ u. f. w.}$$

III.) Wenn der gegebenen Zahl ein Bruch angehängt ist.

$$\log. 234 \frac{3}{4} = \log. 234,75 = 2,3706056;$$

$$\text{oder } \log. 234 \frac{3}{4} = \log. \frac{939}{4} = \log. 939 -$$

$$\log. 4. \text{ u. f. w.}$$

Aufgabe. 2.) Die jedem gegebenen Logarithmus zugehörige Zahl, aus den Tafeln zu finden,

Aufl. I.) Wenn der gegebene Logarithmus positiv ist, und

1.) er sich genau in den Tafeln unter der Charakteristik 3 findet.

$$3,8741918 = \log. 7485. \text{ Und}$$

$$1,8741918 = \log. 74,85. \text{ Und}$$

$$6,8741918 = \log. 7485000 \text{ u. f. w.}$$

$$\text{Eben so ist } 0,8741918 - 5 = \log. 0,00007485.$$

2.) Wenn er sich *nicht genau* in den Tafeln unter der Charakteristik 3 findet.

Es sey der gegebene Logarithmus*, 5639462.

Der *zunächst kleinere* Logarithmus der Zahl 3663 von dem gegebenen subtrahirt, giebt, ohne auf die Charakteristik zu sehen, die *erste Differenz* 1093; und von dem *zunächst grössern* log. 3664 subtrahirt, die *zweite Differenz* 1186.

Setzt man nun $1186:1 = 1093:x$, so ist $x = 0,922$, welches der Zahl 3663 beygefügt, die gefuchte Zahl 3663922 giebt, wenn man den Rang ihrer höchsten Ziffer nach der Charakteristik des gegebenen Logarithmus bestimmt. So ist $4,5639462 = \log. 36639,22$ und $0,5639462 - 4 = \log. 0,0003663922$ u. f. f.

II.) Wenn der gegebene Logarithmus *negativ* ist.

$$I.) -3,6253124 = \log. \frac{1}{4220} \text{ und}$$

$$-4,2533380 = \log. \frac{1}{17920}; \text{ u. f. w.}$$

2.) Eben so auch $-3,6253124 = \times 4 - 3,6253124 - 4 =$
 $(\times 4,0000000 - 3,6253124) - 4 = 0,3746876 - 4 =$

$$\log. 0,0002369661 = \log. \frac{1}{4220}; \text{ u. f. w.}$$

II.

Die Algebra.

I. Von den Gleichungen überhaupt.

§. 77.

Erklärung. 1.) Eine *Gleichung*, æquatio, ist ein doppelter Ausdruck einerley Gröfse. Die beyden Ausdrücke heißen die *Seiten*, membra, und ihre durch die Zeichen $\times$ und $-$ verbundenen Theile, die *Glieder*, termini, der Gleichung.

2.) Die *Algebra* lehret, den Werth der unbekannten Gröfsen, aus gegebenen Bedingungen, mittelst *Gleichungen*, herzuleiten.

An-

Anmerk. 1.) Hiebey kommen drey Verrichtungen vor:

1.) die *Formation* der Gleichung;
2.) die *Reduction* der Gleichung;
3.) die *Solution* der Gleichung.

Anmerk. 2.) Die *Formation* der Gleichungen kann durch *kei-*
ne allgemeine Regeln gelehrt werden. Die *Al-*
gebra beschränkt daher ihre Anweisung bloß auf
die *Reduction*, und *Solution* der Gleichungen ein.

§. 78.

Grundsatz. Wenn man zu beyden Seiten einer Gleichung einerley ad-
dirt, wie auch davon subtrahirt; oder beyde Seiten mit
einerley multiplicirt, wie auch dividirt; oder beyde Seiten
zu einerley Potenz erhebt, wie auch daraus einerley Wur-
zel ziehet: bleibt noch eine Gleichung.

Zusatz. 1.) Jedes *Glied* der Gleichung läßt sich, wenn man
sein Zeichen verändert, versetzen.

2.) Die Zeichen aller *Glieder* lassen sich in die entgegen-
gesetzten verwandeln.

3.) Jede Gleichung läßt sich auf Null bringen.

4.) Die *Brüche* werden weggeschafft, wenn man die
ganze Gleichung mit den *Nennern* der *Brüche* multi-
plicirt. So kann man auch die *unbekannte Gröfse*,
als *Divisor* wegbringen.

Handwritten signature: O. H. ...

II. Von den einfachen Gleichungen.

§. 79.

Erklärung. Eine *einfache* Gleichung, oder vom *ersten Grade*, heisst, worinn die *unbekannte* Grösse, nachdem sie kein Divisor mehr ist, die *erste Potenz* nicht übersteigt.

Aufgabe. 1.) Eine *einfache* Gleichung mit einer *einzigsten unbekannten* Grösse aufzulösen.

Aufl. Es sey gegeben: $ab + \frac{c}{g} + x = ax + \frac{m}{n}$.

$$1.) \quad abgn + cn + xgn = axgn + mg.$$

$$2.) \quad xgn - axgn = mg - abgn - cn$$

$$3.) \quad (gn - agn)x = mg - abgn - cn; \text{ und}$$

$$x = \frac{mg - abgn - cn}{gn - agn}$$

Exempel. 1. Ein Bothe A, der täglich 5 Meilen macht, ist schon 10 Tage weg, da ihm ein anderer B, der täglich 7 Meilen macht, nachgeschickt wird; man fragt, wann dieser jenen einholen wird?

Exempel. 2.) Es soll aus gutem Weine, die Maass zu 1 fl. 12 kr. und schlechtem zu 45 kr. ein gemischter Wein zu 54 kr. werden, man fragt *wie viel* von jeder Sorte zur Mischung kommen muss? *Alligationsregel.*

Zusatz. 1.) Drückt man die gegebenen Grössen *allgemein* durch *Buchstaben* aus, so erhält man eine *allgemeine Formel*, welche für alle Fragen *ähnlicher Art* dient.

Exempel. 1.) Für 1. Ex. A macht täglich a Meilen, und ist c Tage voraus; B bewegt sich geschwinder, und macht täglich b Meilen. Holt nun dieser jenen in x Tagen ein; so wird $x = \frac{ac}{b-a}$; d. i.

man findet x , wenn man ac , d. i. den Weg, den A voraus hat, mit $b - a$, d. i. mit der Differenz der beyden Geschwindigkeiten dividirt.

Exempel. 2.) Für 2. Ex. Der Werth der Einheit des Bessern sey a , des geringern b , des gemischten c , der Theil des Geringern x , so wird $x = \frac{a-c}{a-b}$,

d. i. man findet x , wenn man die Differenz des hohen und mittlern Werths, mit der Differenz des hohen und geringern dividirt.

Exempel. 3.) Eine Zahl x finden, die mit a multiplicirt um c zu wenig, mit b aber multiplicirt um d zu viel giebt. Aufl. $x = \frac{c+d}{b-a}$

Anwend. 1.) Bezahle ich jedem Arbeiter 6 Rthlr: so habe ich 5 Rthlr übrig; bezahle ich jeden mit 7 Rthlr: so habe ich 3 Rthlr zu wenig. *Wie viele Arbeiter sind dieses, und wie groß ist meine Baarschaft?*

Anwend. 2.) Eine Sache soll für eine gewisse Summe ausgespielt werden, kostet nun 1. Loos 5 fl. so kommen 42 fl. zu wenig; kostet es 6 fl. so kommen 58 fl. zu viel. *Wie viel waren es Loose, und wie groß die Summe?*

Zusatz. 2.) Wenn die eine unbekannte Gröfse zugleich die andere bestimmt, so kann man diese durch jene, und durch bekannte Gröfßen ausdrücken; und also durch eine Gleichung mehrere unbekannte Gröfßen finden.

Exempel. 1.) Man soll zwey Zahlen finden, deren Summe S , und Differenz D , gegeben ist.

— — 2.) Man soll drey Zahlen finden, wenn die Summe eines jeden Paares davon gegeben ist; nämlich a die Summe der 1ten und 2ten Zahl; b der 1ten und 3ten; c der 2ten und 3ten.

— — 3.) Eine Zahl a , soll in zwey Theile dergestalt zerlegt werden, dafs wenn die 1te mit m , die 2te mit n multiplicirt wird, beyde Produkte einander gleich sind.

An-

Anwend. Zwey Spieler haben 200 Rthlr zu ungleichen Theilen zusammengelegt, doch daß sie den Gewinn halbiren wollen; und es findet sich, daß der 1te 6mal, der andere 10mal so viel erhalten, als sein Beytrag gewesen ist. Wie groß war dieser Beytrag, und wie groß der Gewinn? —

— — 4.) Zu 2 silbernen Bechern ist ein Deckel. Der erste Becher wiegt 12 Loth, und mit dem Deckel zweymal so viel als der 2te Becher; dieser aber mit dem Deckel 3mal so viel, als der erste. Wie viel wiegt der Deckel, und der 2te Becher? —

— — 5.) Ein Vater sagt zu seinem Sohne: dein jetziges Alter ist $\frac{2}{3}$ des Meinigen; vor 6 Jahren aber war es $\frac{1}{4}$. Wie alt ist jetzt der Vater, und wie alt der Sohn? —

Zusatz. 3.) Zuweilen muß man die Frage durch einzelne Gleichungen führen, und das letzte Resultat, oder die Summe aller Resultate in Betracht ziehen.

Exempel. 1.) Ein Kaufmann braucht für sein Hauswesen jährlich 100 Louisdor. Diese nimmt er von seinem Capital, dessen Rest er jedesmal um $\frac{1}{3}$ vermehrt. Nach drey Jahren findet er sein anfängliches Capital gerade verdoppelt; wie groß war dieses? —

— — 2.) Ein Rittergut ist so verpachtet, daß nach 6 Jahren zugleich mit den Zinsen 12000 Rthlr bezahlt

zahlt werden. Im 3ten, und 5ten Jahre war Miswachs, wofür nach gerichtlicher Besichtigung das erstemal $\frac{1}{2}$, und das 2te mal $\frac{1}{4}$ von der Pacht erlassen wird. Wie groß war die Pacht, und wie viel geht von der Summe ab? —

— — 3.) Ein Vermögen ward unter die Söhne so vertheilt: der 1te nimmt 100 Thlr. und $\frac{1}{10}$ des übrigen; der 2te 200 und $\frac{1}{10}$ des übrigen; der dritte 300 und $\frac{1}{10}$ des übrigen, u. f. w. Da sich dann findet, daß jeder gleichviel bekommen hat. Wie groß war das Vermögen, wie viel Söhne, wie viel bekam jeder?

§. 80.

Aufgabe. 2.) Eine Aufgabe mit zwey unbekannten Größen, x , y , für welche zwey einfache Gleichungen $x + y = a$ und $f x + d y = b$ vorhanden sind, aufzulösen.

Aufl. 1.) $x = a - y$; $x = \frac{b - d y}{f}$; also $a - y = \frac{b - d y}{f}$

2.) $f a - f y = b - d y$; folglich $(d - f) y = b - f a$,

und $y = \frac{b - f a}{d - f}$.

3.) Setzt man diesen Werth statt y in eine der beyden

er-

ersten Gleichungen z. B. $x + y = a$, so hat man

$$\frac{b-fa}{d-f} = a, \text{ folglich } x = a - \left(\frac{b-fa}{d-f} \right) = \frac{da-b}{d-f}$$

Exempel. 1.) Es sollen 30 Rthlr bezahlt werden. Dies kann A, wenn ihm B $\frac{2}{3}$ seines Geldes zu Hülfe giebt; B aber, wenn ihm A $\frac{1}{4}$ seines Geldes giebt. Man frägt: wie groß war die Baarschaft eines jeden? —

Exempel. 2.) Aus 2 Röhren A, B, läuft Wasser in ein Gefäß. Das 1te mal läuft A, a; B, b Stunden, man findet c Maafs im Gefäße. Das 2te mal läuft A, u, B, β Stunden, und man findet v Maafs im Gefäße. Wie viel giebt jede Röhre stündlich?

Man soll 2 Zahlen x, y finden deren Summe S, und deren Differenz D gegeben ist.

Aufgabe. 3.) Eine Aufgabe mit drey unbekannten Gröfsen, x, y, z, für welche man drey einfache Gleichungen A, B, C, hat, aufzulösen.

Aufl. Es sey A) $x + y = a$, B) $x + z = b$. C) $y + z = c$.

1.) Aus A und B, ist $x = a - y$; und $x = b - z$.

2.) Man erhält dadurch D) $a - y = b - z$.

3.) Aus C und D ist $y = c - z$; und $y = a - b + z$.

4.) Man erhält dadurch E) $c - z = a - b \times z$.

5.) Aus E findet man $2z = c - a \times b$, folglich $z = \frac{c - a \times b}{2}$

6.) Dielen Werth anstatt z in C gesetzt giebt

$$y = c - \frac{c - a \times b}{2} = \frac{c + a - b}{2}; \text{ in B aber}$$

$$x = b - \frac{c - a \times b}{2} = \frac{b - c + a}{2}$$

Anmerk. 1.) Wäre in C auch x befindlich: so würde dessen Werth daraus bestimmt, und seinem Werthe aus A, oder B gleich gesetzt.

Anmerk. 2.) Enthielte jede der gegebenen Gleichungen alle unbekannte Gröſſen; so setze man in eine derselben anstatt y , und z die gefundenen Werthe, um x zu finden.

Exempel. 1.) Drey Spieler A, B, C, haben dergestalt gewonnen, das der Gewinnst des ersten nebst $\frac{1}{2}$ der beyden übrigen ist $= a$.

$$2 \text{ten nebst } \frac{1}{2} = b$$

$$3 \text{ten nebst } \frac{1}{4} = c$$

wie viel hat jeder gewonnen?

Exempel. 2.) Drey Personen A, B, C, spielen miteinander. Im ersten Spiele verliert A an jeden der beyden andern

den so viel, als jeder davon Geld hat. Im zweyten thut eben dieß B; im dritten auch C. Zuletzt hat jeder 24 fl. Wie viel hatte jeder Anfangs?

Anmerk.) Auf eben diese Art kann man vier, und mehrere unbekannte Gröſſen, aus eben ſo vielen einfachen Gleichungen finden; nur muß das Gegebene zu ſo vielen Gleichungen hinreichen, als unbekannte Gröſſen vorhanden ſind; und ſämmtliche bloß in der erſten Potenz vorkommen; daher darf auch keine mit der andern multiplicirt ſeyn.

III. Von den zuſammengeſetzten, beſonders quadratiſchen Gleichungen.

§. 81.

Erklärung. 1.) Eine Gleichung heißt *beſtimmt*, determinata, worinn nur eine unbekannte Gröſſe vorkommt; und eine Aufgabe heißt *beſtimmt*, wenn ſie durch eine beſtimmte Gleichung aufgelöſet wird.

2.) Eine *beſtimmte* Gleichung heißt *irrational*, wenn in einem, oder in mehrern die unbekannte Gröſſe, unter einem Wurzelzeichen ſtehet; *rational* aber, wo dieſes nicht iſt, die Coefficienten mögen rational, oder irrational ſeyn.

3.) Eine *bestimmte Gleichung* heisst *Zusammengesetzt*,¹ worinn die unbekannte Grösse die erste Potenz übersteigt; und ist demnach von 2, 3, 4ten und höhern Grade; oder eine *quadratische*, *cubische*, *biquadratische*, und *höhere Gleichung*.

4.) Eine *zusammengesetzte Gleichung* heisst *rein*, *pura*, wenn darinn die *unbekannte Grösse* bloß in *einer Potenz* vorkömmt; *gemischt* aber, oder *unrein*, *adfecta*, wenn sie *verschiedene Potenzen* der *unbekannten Grösse* enthält.

5.) Die *Wurzel*, *radix*, einer Gleichung heisst der Werth der unbekannten Grösse in der Gleichung. Diesen *Werth finden*, heisst die *Gleichung auflösen*.

§. 82.

Aufgabe. 1.) Eine *reine Gleichung* aufzulösen.

Auflös. Die *allgemeine Form* aller *reinen Gleichungen* ist $x^n = r$;

daher $x = \sqrt[n]{r}$, oder $n | x = | r$, folglich $| x = \frac{1 \cdot r}{n}$.

Je nachdem nun der Exponent n die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. f. w. bedeutet, ist auch die Gleichung *einfach*, *quadratisch*, *cubisch*, *biquadratisch* u. f. w.

Zusatz. Für eine *quadratische Gleichung* ist $x^2 = r$ folglich

$$x = \pm \sqrt{r}.$$

Exem-

Exempel. Man soll aus der Summe a zweier Zahlen, und aus der Summe b ihrer Quadrate die Zahlen selbst finden;

§. 83.

Aufgabe. 2.) Eine gemischte quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflös. Die allgemeine Form der gemischten quadratischen Gleichung

ist $x^2 - p x = q$, und hier ist

$$x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{4} p^2\right)}$$

Zusatz. Jede Gleichung von der Form $x^{2m} - p x^m - q = 0$ kann nach der Art der quadratischen Gleichungen aufgelöst werden.

Anmerk. In einer quadratischen Gleichung von der Form $x^2 - p x - q = 0$ sind die Wurzeln unmöglich, wenn $q > \frac{1}{4} p^2$ ist.

Exempel. Die Summe a zweyer Zahlen, und die Summe b ihrer Quadrate ist, wie im Exempel §. 82. gegeben; man soll die Zahlen x, y , selbst finden.

IV. Anwendung der Gleichungen auf die Progressions- und Zinsenrechnung.

§. 84.

Aufgabe. 1.) Die Gleichungen für das letzte Glied einer arithmetischen Reihe, und für die Summe der Reihe sind gegeben;

P 3

man

man soll von den fünf Dingen a, u, d, n, S , jede zwey aus den übrigen finden.

Aufsl. 1. Nach §. 53. Zuf. 1.) ist $u = a + (n-1)d$. Hieraus lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$\text{I.) } a = u - (n-1)d \quad \text{III.) } d = \frac{u-a}{n-1}$$

$$\text{II.) } u = a + (n-1)d \quad \text{IV.) } n = 1 + \frac{u-a}{d}$$

2.) Nach §. 54. Zuf. 1. ist $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$; hieraus wer-

den wieder vier Gleichungen hergeleitet:

$$\text{V.) } a = \frac{2S}{n} - u \quad \text{VII.) } n = \frac{2S}{a+u}$$

$$\text{VI.) } u = \frac{2S}{n} - a \quad \text{VIII.) } S = \frac{a+u}{2} \cdot n$$

3.) In der Gleichung $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$; setze man statt

u seinen Werth aus der II. Formel $u = a + (n-1)d$

und man erhält die neue Gleichung $2an + dnn$

$- dn = 2S$. Und daraus

$$\text{IX. } a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$$

$$\text{XI. } S = \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) n$$

$$\text{X. } d = \frac{2S}{(n-1)n} - \frac{2a}{n-1}$$

$$\text{XII. } n =$$

$$= \frac{d - 2a \pm \sqrt{(8dS - (2a-d)^2)}}{2d}$$

4.) In der nämlichen Gleichung $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$, setze man

aus der ersten Formel statt a seinen Werth $a = u - (n-1)d$; und man erhält die neue Gleichung $2S = 2un - dnn + dn$. Daraus;

$$\text{XIII. } u = \frac{S + (n-1)d}{n} \quad \text{XIX}$$

$$\text{XIV. } d = \frac{2u - \frac{2S}{n}}{n-1} \quad \text{XX}$$

$$\text{XV. } S = \left(u - \frac{(n-1)d}{2} \right) n$$

$$\text{XVI. } n = \frac{d \pm 2u \pm \sqrt{(-8dS - (d \pm 2u)^2)}}{2d}$$

5.) Endlich setze man in eben derselben Formel $S = \frac{a+u}{2} \cdot n$ aus

aus der IV. Form. Statt $n = 1 \pm \frac{u-a}{d}$ seinen

Werth; man erhält die neue Gleichung $2S = a \pm u$

$$\pm \frac{u u - a a}{d} = a \pm u \pm \frac{(u \pm a) \cdot (u - a)}{d}$$

Und daraus erhält man:

$$\text{XVII. } a = \frac{d \pm \sqrt{(-8dS \pm (d \pm 2u)^2)}}{2}$$

$$\text{XVIII. } d = \frac{(u \pm a) \cdot (u - a)}{2S - a - u}$$

$$\text{XIX. } u = \frac{-d \pm \sqrt{(8dS \pm (2a - d)^2)}}{2}$$

$$\text{XX. } S = \frac{(u \pm a) \cdot (d \pm u - a)}{2d}$$

Diese 20 Formeln sind in folgender Tabelle dargestellt.

n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$
n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$
n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$
n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$
n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$
n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$
n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$
u	$\frac{b(1-n)}{2}$	a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$
a	$\frac{b(1-n)}{2}$	n	$\frac{b(1-n)}{2}$	u	$\frac{b(1-n)}{2}$

U e b e r b l i c k

a r i t h m e t i s c h e n R e i h e n .

Gefucht	Gegeben.	Auflösung.
a.	u. d. n.	$u - (n - 1)d$
	u. n. S.	$\frac{2S}{n} - u$
	d. n. S.	$\frac{S}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$
	u. d. S.	$\frac{d \pm \sqrt{(8dS - (d \pm 2u)^2)}}{2}$
u.	a. d. n.	$a - (n - 1)d$
	a. n. S.	$\frac{2S}{n} - a$
	d. n. S.	$\frac{S}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$
	a. d. S.	$\frac{d \pm \sqrt{(8dS - (2a - d)^2)}}{2}$
d.	a. u. n.	$\frac{u - a}{n - 1}$
	a. n. S.	$\frac{2S - 2an}{(n - 1)n}$

Gefucht.	Gegeben.	Auflösung.
d.	u. n. S.	$\frac{2un - 2S}{(n-1)n}$
	a. u. S.	$\frac{(u-a)(u-a)}{2S - a - u}$
	a. u. d.	$\frac{u-a}{1-x} \cdot d$
n.	a. u. S.	$\frac{2S}{a-x-u}$
	a. d. S.	$\frac{d - 2a - \sqrt{(8dS - (2a-d)^2)}}{2d}$
	u. d. S.	$\frac{d - 2u - \sqrt{-8dS - (d-2u)^2}}{2d}$
S.	a. u. n.	$\frac{\frac{1}{2}n \cdot (a-x-u)}{(n-1)d - a}$
	a. d. n.	$\frac{(u - (n-1)d)n}{2}$
	u. d. n.	$\frac{(u - (n-1)d)n}{2}$
	a. u. d.	$\frac{(u-a)(d-u-a)}{2d}$

Anmerk. Diese Formeln sind zwar für *steigende* Reihen gemacht; man darf aber nur das erste Glied u , und das letzte a nennen, so gelten sie auch für die *abnehmende* Reihen.

$$\frac{n(1-u)}{(b-u)(b-u)} \quad \S. 85.$$

Aufgabe. 2.) Die Gleichungen für das *letzte Glied* einer *geometrischen* Reihe, und für die *Summe* der Reihe sind gegeben; man soll von den fünf Dingen a, u, e, n, S , jede zwey aus den übrigen dreyen finden.

Aufl. 1.) Nach §. 64. Zus. 1. ist $u = ae^{n-1}$. Hieraus entstehen folgende vier Formeln:

$$\text{I.) } a = \frac{u}{e^{n-1}}.$$

$$\text{II.) } u = ae^{n-1}.$$

$$\text{III.) } e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}.$$

$$\text{IV. } n = 1 + \log. \frac{u}{a} : \log. e$$

$$\text{2.) } \text{Nach §. 67. ist } S = \frac{ue-a}{e-1}. \text{ Also:}$$

$$\text{(V.) } a = ue - (e-1)S.$$

$$\text{VI.) } u = \frac{a^{n-1} (e - 1) \cdot S}{e^{n-1} - 1} \quad \text{XII.) } S = \frac{e^{n-1} - 1}{e - 1} \cdot u$$

4.) In der obigen Gleichung $S = a \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1}$ man aus der II. Formel $u = \frac{S - a}{S - 1}$ statt u seinen

$$\text{VII.) } e = \frac{S - a}{S - u}$$

Werth; man erhält dann die neue Gleichung

$$\text{VIII.) } S = \frac{u e - a}{e - 1} \quad \text{XIX.) } S = \frac{u e - a}{e - 1}$$

3.) Aus der Gleichung $S = \frac{u e - a}{e - 1}$ leite man die

Gleichung ab; $S - a = \frac{S e - u e}{e - 1}$; in dieser setze man

aus der I. Formel $a = \frac{u}{n - 1}$ statt a seinen Werth und

$$\text{es entsteht die Gleichung } (S - u) e = S - \frac{u}{n - 1}$$

Wird der Bruch aufgehoben, so erhält man

$$(S - u) e^n = S e^{n-1} - u; \text{ und daraus:}$$

$$\text{IX.) } u = \frac{(e^{n-1}) \cdot (S e - S)}{e^n - 1}$$

$$\text{X.) } e^n - \frac{S}{S - u} e^{n-1} - \frac{u}{S - u} = 0$$

$$\text{XI.) } n = 1 + \log. \frac{u}{S - e(S - u)} : \log. e$$

$$\text{XII.) } S = \frac{u}{e^n - 1} \left(\frac{e^n - 1}{e - 1} \right)$$

4.) In der obigen Gleichung $S e - u e = S - a$ setze man aus der II. Formel $u = a e^{n-1}$ statt u seinen Werth; man erhält dann die neue Gleichung $S e - a e^n = S - a$; und daraus folgende Formeln.

$$\text{XIII.) } a = S \cdot \frac{e - 1}{e^n - 1}$$

$$\text{XIV. } e^n - \frac{e}{a} \cdot S - \frac{S}{a} - 1 = 0$$

$$\text{XV. } n = \log. \left(S \cdot \frac{e - 1}{a} - 1 \right) : \log. e.$$

$$\text{XVI.) } S = a \left(\frac{e^n - 1}{e - 1} \right)$$

5.) Endlich in der nämlichen Gleichung $S e - u e = S - a$ setze man aus der dritten Formel $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ statt e

seinen Werth, und man erhält

$$(S - u) \cdot \left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \right) = S - a;$$

$$\log. : \frac{\log. (S - u)}{\log. \left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \right)} = \log. (S - a)$$

XIX

3 9

oder

oder, weil $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}}$, so ist

$$(S - u) \cdot \left(\frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{a}} \right) = S - a; \text{ also}$$

$$(S - u) \cdot (\sqrt[n-1]{u}) = (S - a) \cdot (\sqrt[n-1]{a}).$$

Erhebt man diese Gleichung zur $n-1$ ten Potenz, so erhält man folgende Formeln:

$$\text{XVII.) } a \left((S - a)^{n-1} \right) - u \left((S - u)^{n-1} \right) = 0$$

$$\text{XVIII.) } u \left((S - u)^{n-1} \right) - a \left((S - a)^{n-1} \right) = 0$$

$$\text{XIX.) } n = 1 + \log. \frac{u}{a} : \log. \frac{S - a}{S - u}$$

$$\text{XX.) } S = \frac{u \sqrt[n-1]{u} - a \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$$

Die brauchbarern dieser 20 Formeln sind in folgender Tabelle dargestellt.

U e b e r b l i c k

der

g e o m e t r i s c h e n R e i h e n.

Gefucht.	Gegeben.	Auflösung.
a.	u. e. n. u. e. S. e. n. S. u. n. S.	$u : e^{n-1}$ $ue - S(e - 1)$ $(e - 1)S : e^n - 1$ ---
u.	a. e. n. a. e. S. n. e. S. a. n. S.	ae^{n-1} $((a - S)(e - 1)) : e$ $(Se - S)(e^{n-1}) : (e^n - 1)$ ---
e.	a. u. n. a. u. S. u. n. S. a. n. S.	$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \log. \frac{u}{a} : (n - 1)$ $(S - a) : (S - u)$ --- ---

Gesucht	Gegeben.	Auflösung.
	a. u. e.	$1 \times \log. \frac{u}{a} : \log. e.$
n.	S. u. e.	$1 \times \log. \frac{u}{S - e(S - u)} : \log. e$
	a. S. e.	$\text{Log.} (1 \times S(\frac{e - 1}{a})) : \log. e$
	a. u. S.	$1 \times \log \frac{u}{a} : \log. \frac{S - a}{S - u}$
	a. u. e.	$(ue - a) : (e - 1)$
	n. u. e.	$\frac{u}{e^n - 1} (\frac{e^n - 1}{e - 1})$
S.	a. n. e.	$a(e^n - 1) : (e - 1)$
	a. n. u.	$\frac{u \sqrt[n-1]{u - a} \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$

§. 86.

Erklärung. Die Zahl, welcher sich eine Reihe immer abnehmender Zahlen immer mehr nähert, und solcher, jemehr Glieder dieser Reihe man annimmt, so nahe kömmt, als man will; jedoch sie nie völlig erreicht, heißt die Summe dieser Reihe, die man sich ohne Ende fortgesetzt denkt, oder die *Summe der unendlichen Reihe*.

Zusatz. 1.) Setzt man allgemein $e = \frac{1}{x}$, also $S = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$+ \frac{1}{x^3} + \dots \text{in infinitum; so ist } S = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} : \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

2.) Wechseln in solcher Reihe die Zeichen der Glieder

$$\text{der } \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \dots = A$$

$$\text{so theile man sie in } \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \dots = C$$

und

$$\frac{1}{1-x} = 2 \text{ und in } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots \right)$$

$$\dots = \frac{1}{x} (1 + C) = B.$$

Demnach ist $A = B - C = \frac{1+C}{x} - C$. Setzt man nun

in der Formel Zuf. 1.) x^2 anstatt x ; so ist $C = \frac{1}{x^2 - 1}$

$$\text{folglich } A = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) - \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{x^2}{x(x^2 - 1)} - \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x-1)1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x+1}$$

$$3.) \text{ Da } A + 2C = B - C + 2C = B + C;$$

so giebt $A + 2C$ eine Reihe wie A (Zuf. 2.) aber mit lauter bejahten Gliedern, Zuf. 1.)

R₂

4.)

4.) Setzt man (Zuf. 1.) $x \rightarrow 2$ statt x ; so wird $S = \frac{1}{x \rightarrow 1}$

und die Reihe $\frac{1}{x \rightarrow 2} + \frac{1}{(x \rightarrow 2)^2} + \frac{1}{(x \rightarrow 2)^3} + \dots$

$= \frac{1}{x \rightarrow 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots$ Zuf. 2.

§. 87.

Aufgabe. Ein Capital a steht n Jahre auf $\frac{q}{r}$ Zinsen, welche jährlich

dazu geschlagen werden, wie groß wird nach Verlauf dieser Zeit sein Werth S seyn?

Aufl.

$$\text{I.) } \log. S = \log. a + n \log. \left(\frac{r + q}{r} \right)$$

$$a = 1000 \text{ fl; } n = 20; \frac{q}{r} = \frac{5}{100}$$

$$\text{II.) } \log. a = \log. S - n \log. \left(\frac{r + q}{r} \right)$$

$S = 1000$ fl. ist nach n Jahren ohne Zinsen gefällig;
wie groß ist sein jetziger Werth a ? oder

ich

ich will nach n Jahren 10000 fl; wie viel Capital a ist dazu nöthig?

$$\text{III.) Log. } (r \times q) = \frac{\log. S - \log. a + n \log. r}{n}$$

Es sey $S = 1000$ nach $n = 10$ Jahren gefällig, und werde verkauft für $a = 6756$; wie viel Procent?

Oder: aus 6 Menschen nach der Sündfluth war nach 200 Jahren eine Million geworden; wie groß war jährlich die Bevölkerung?

$$\text{IV.) } n = \frac{\log. S - \log. a}{\log. \left(\frac{r \times q}{r} \right)}$$

$a = 1000$ bringt $S = 2500$
zu 5 Procent; wie viel Jahre?

§. 88.

Aufgabe. Ein Capital a steht unter vorigen Bedingungen, und wird am Ende eines jeden Jahres mit einem Capital b , unter eben den Bedingungen vermehrt; wie groß ist der gesammte Werth T nach n Jahren?

$$\text{Auf- I.) } T = \frac{a q \times b r}{q} \cdot \left(\frac{r \times q}{r} \right)^n - \frac{b(r \times q)}{q}$$

R 3

Nimmt

Nimmt man $b = a$, dass aus T, R wird: so ist

$$\text{II.) } R = a \cdot \frac{r \times q}{r - q} \cdot \left(\frac{r \times q}{r - q} \right)^n - a \frac{r \times q}{r - q}$$

$$\text{III.) } a = \frac{R \cdot q}{(r \times q) \cdot \left(\frac{r \times q}{r - q} \right)^n - r \times q}$$

$R = 10000$ fl. nach $n = 20$ Jahren, ohne Zinsen gefällig, soll so abgewogen werden, dass jährlich nicht nur die Summe a bezahlt wird; sondern auch, dass a jährlich mit den Zinsen, und mit a vermehrt, nach n Jahren R bringt, wie groß muss a seyn?

$$\text{IV.) } n = \frac{\log. (R \cdot q \times a \cdot r \times a \cdot q) - \log. (a \cdot r \times a \cdot q)}{\log. \left(\frac{r \times q}{r - q} \right)}$$

Ich zahle wie zuvor jährlich a ; in wie viel Jahren ist R abgetragen?

§. 89.

Aufgabe. Es hat jemand eine jährliche Rente a durch n Jahre zu genießen, und will sie verkaufen, welches ist ihr jetziger Werth P ?

Auf.

$$\text{Aufl. I.) } P = \frac{ar}{q} - \frac{ar}{q} \cdot \left(\frac{r}{r+q} \right)^n$$

Für eine jährliche Rente a auf n Jahre muß ich der allgemeinen Leihebank das Capital P zahlen ; wo frey-

lich $a >$ als die Zinsen $P \cdot \frac{q}{r}$

$$\text{II.) } a = \frac{Pq}{r}$$

$$r - r \left(\frac{r}{r+q} \right)^n$$

Für das Capital P erhalte ich auf n Jahre die Rente a . Oder : wie groß ist für das Capital P die Leibrente a , wenn die Bank meine Lebenszeit n Jahre schätzt, und q Zinsen zahlt ? Oder : eine Schuld P , die jährlich mit q Procent zu verzinzen ist, soll in n Jahren abgetragen seyn, wenn jährlich eine gleiche Summe a gezahlt wird ?

$$\begin{aligned} \text{III.) } n &= \frac{\log. (ar - Pq) - \log. ar}{\log. r - \log. (r+q)} \\ &= \frac{\log. ar - \log. (ar - Pq)}{\log. (r+q) - \log. r} \end{aligned}$$

Für das Capital P zu q Procent genieße ich die Rente a
die

die gröfser als die Zinsen $\frac{q}{r}$, nach wie viel Jahren

wird das ganze Capital verzehrt feyn?

V. Von den unbestimmten Gleichungen.

§. 90.

Erklärung. 1.) Eine Gleichung heifst *unbestimmt*, wenn sie mehr als eine unbekannte Gröfse enthält; und eine Aufgabe heifst *unbestimmt*, wenn sie durch eine unbestimmte Gleichung aufgelöst wird.

— — — 2.) Eine *unbestimmte Aufgabe* ist *einfach*, wenn die unbekannten Gröfsen nur in der ersten Potenz, auch nicht miteinander multiplicirt darinnen vorkommen: *zusammengesetzt* hingegen, welche höhere Potenzen, oder auch Produkte der unbekannten Gröfsen enthält.

— — — 3.) Die Lehre von Auflösung unbestimmter Aufgaben, heifst die *unbestimmte Analytik*, welche zur Uebung des Verstandes, und zu gröfserer Fertigkeit in analytischen Rechnungen sehr dienlich ist.

§. 91.

Aufgabe. 1.) *Einfache unbestimmte Aufgaben* aufzulösen.

Auß.

Aufl. Bey diesen kömmt die Hauptsache darauf an,

- 1.) daß man von den gesuchten Größen einige, welche man will, und so viele, als die Zahl der Gleichungen es gestattet, zugleich aber auch die Einschränkungen bestimme, denen die übrigen nicht zu bestimmenden unterworfen sind;
- 2.) daß man hierauf diesen übrigen alle mögliche Werthe, welche mit obgedachten Einschränkungen bestehen können, beylege;
- 3.) daß man endlich diese Werthe in die bereits gefundenen Endgleichungen, einen nach dem andern, übertrage, um der vorgelegten Aufgabe durch die verschiedenen möglichen Auflösungen ein Genüge zu leisten.

Beyspiele.

- 1.) Für 20 Rthlr sollen 20 Maafs Wein von viererley Sorten gekauft werden; Ungerischer p Maafs zu 4 Rthlr. Champagner q M. zu 2 Rthlr. Rheinwein r M. zu 1 Rthlr. und Frankenwein S M. zu $\frac{1}{2}$ Rthlr.
- 2.) Es sollen für 20 Rthlr ein Dutzend Paar Strümpfe eingekauft werden; seidne p Paare zu 3 Rthlr; feine wollene q Paare, zu 1 Rthlr; und baumwollene r Paar zu $\frac{1}{2}$ Rthlr.
- 3.) Ein Münzmeister hat dreyerley Silber, 14, 11, und 9 lö-

S

thi-

thiges, und soll 30 Mark 12 löthiges daraus machen.

Wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

§. 92.

Aufgabe. 2.) Eine zusammengesetzte unbestimmte Aufgabe aufzulösen.

Aufl. Hier sind zwey Fälle möglich:

1.) der leichtere, daß die eine unbekannte Gröſſe y , in der ersten, die übrigen aber, als x , in höhern Potenzen vorkommen. In diesem Falle hat man zwar Formeln zur Berechnung, sie sind aber, weil es sich nicht oft so trifft, selten anzuwenden.

2.) Der gewöhnlichere, daß auch y , und demnach alle unbekannte Gröſſen x ; u. f. w. in höhern Potenzen vorhanden sind. In diesem Falle kommt, wenn man y bestimmt, x u. f. w. in der zweyten, und noch höhern Potenzen hinter das Wurzelzeichen; da denn die Hauptsache darauf beruhet, solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Wurzelzeichen oder die Irrationalität eliminirt werden.

Beispiele.

1.) Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Differenz auch eine Quadratzahl ist.

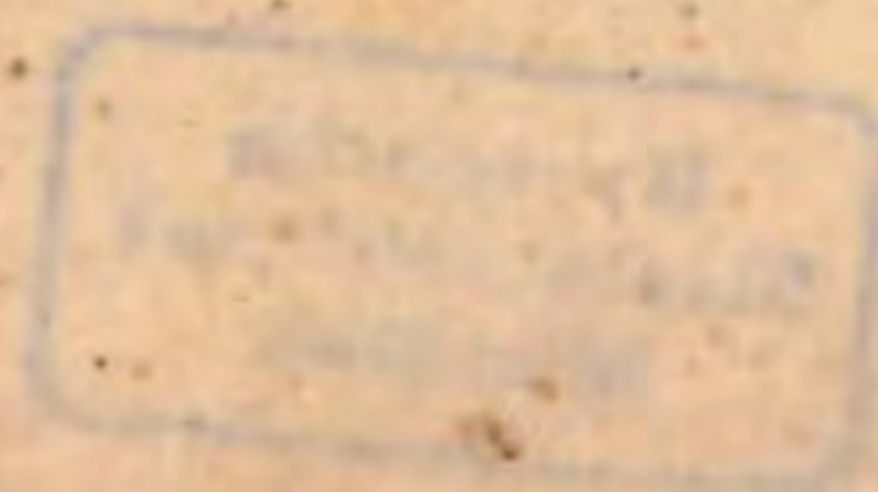
2.)

- 2.) Man soll eine Quadratzahl x^2 finden, welche von einer Quadratzahl a^2 subtrahirt, zur Differenz eine Quadratzahl y^2 habe.
- 3.) Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Summe auch eine Quadratzahl ist; doch sollen alle ganze Zahlen feyn.



2.) Man soll eine Quadratzahl x finden, welche von einer
 Quadratzahl y differirt, zur Differenz eine Quadrat-
 zahl z habe.

3.) Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Summe
 auch eine Quadratzahl ist; doch sollen alle ganze Zah-
 len sein.





Reiner, Gregor Leonhard,

Die Grundlehren Der Arithmetik Und Der Algebra

Füssen 1796

4 Math.p. 294 x

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053767-3

VD18 1533287